

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра физики атмосферы

А.В. Васильев, В.П. Огибалов, Ю.М. Тимофеев

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2016 г.

Рецензенты:

профессор кафедры астрофизики,  
доктор физ.-мат. наук, Д.И. Нагирнер  
профессор кафедры молекулярной спектроскопии,  
доктор физ.-мат. наук, Н.Н. Филиппов

Печатается по решению Ученого совета физического факультета  
СПбГУ.

**А.В. Васильев, В.П. Огибалов, Ю.М. Тимофеев**

**Численные методы теории переноса излучения.  
СПб., 2016. 256 с.**

В учебно-методическом пособии изложены численные методы моделирования полей солнечного и теплового излучения в атмосфере. Приведены различные методы, в частности, учитывающие процессы многократного рассеяния излучения, изложены конкретные вычислительные схемы и алгоритмы. Пособие предназначено для магистрантов, обучающихся по направлению «Физика», в рамках учебного курса «Численные модели геофизической динамики и оптики», а также может представлять интерес для аспирантов и специалистов в области атмосферной оптики.

## Оглавление

Введение.....	5
1. Постановка основных вычислительных задач. Случаи отсутствия рассеяния..	7
1.1. Формальная модель оптических измерений.....	7
1.2. Ослабление излучения в атмосфере. Расчеты оптической толщины.....	11
1.3. Расчет интенсивности монохроматического теплового излучения.....	17
1.4. Расчет потоков монохроматического теплового излучения. Учет влияния поверхности.....	24
2. Рассеяние излучения.....	28
2.1. Рассеяние излучения – основные понятия и соотношения.....	28
2.2. Азимутальные гармоники.....	34
2.3. Метод последовательных порядков рассеяния.....	39
2.4. Учет поверхности при рассеянии излучения.....	44
2.5. Учет отражения от поверхности в методе последовательных порядков рассеяния.....	51
3. Методы сферических гармоник, дискретных ординат и сложения слоев.....	57
3.1. Метод сферических гармоник.....	57
3.2. Метод дискретных ординат.....	62
3.3. Упрощенный вариант метода дискретных ординат – метод конечных разностей.....	72
3.4. Метод сложения слоев.....	76
4. Метод Монте-Карло.....	83
4.1. Статистическое моделирование.....	83
4.2. Моделирование элементарных процессов при переносе излучения.....	87
4.3. Расчет полусферических потоков солнечного излучения.....	95
4.4. Расчет интенсивности рассеянного солнечного излучения.....	101
5. Спектральное интегрирование.....	108
5.1. Возможности прямого спектрального интегрирования.....	108
5.2. k-метод.....	112
5.3. Векторные модификации k-метода.....	117
5.4. Спектральное интегрирование методом Монте-Карло.....	122
6. Учет поляризации излучения.....	128
6.1. Поляризация излучения.....	128
6.2. Физические процессы, приводящие к появлению поляризованного излучения в атмосфере.....	137
6.3. Учет поляризации в теории переноса излучения.....	141
6.4. Модификации численных методов для поляризованного излучения.....	146
6.5. Метод сложения слоев для поляризованного излучения.....	152
7. Дополнительные возможности численных методов.....	158
7.1. Распространение излучения в сферической атмосфере.....	158
7.2. Рассеяние излучения в сферической атмосфере.....	165
7.3. Атмосферная рефракция.....	175

7.4. Оптика моря.....	183
7.5. Учет горизонтальной неоднородности атмосферы и поверхности.....	193
8. Радиационные коды – программы расчета характеристик излучения.....	200
8.1. Классификация радиационных кодов.....	200
8.2. Примеры радиационных кодов.....	201
8.3. Краткий анализ радиационных кодов.....	205
8.4. Примеры сравнений радиационных кодов.....	211
Приложения.....	215
Приложение 1. Алгоритм поиска интервала в упорядоченном массиве.....	215
Приложение 2. Алгоритмы вычисления функции Планка.....	215
Приложение 3. Полный алгоритм расчета интенсивности монохроматического теплового излучения.....	217
Приложение 4. Вычисление интегральных экспонент.....	218
Приложение 5. Квадратурная формула Гаусса.....	221
Приложение 6. Полиномы и присоединенные функции Лежандра.....	222
Приложение 7. Вычисление коэффициентов системы интегральных уравнений методе сферических гармоник.....	223
Приложение 8. Операции с матрицами.....	226
Приложение 9. Решение системы уравнений для нахождения неопределенных констант интегрирования в методе дискретных ординат.....	232
Приложение 10. Генератор случайных чисел, равномерно распределенных на интервале [0,1].....	234
Приложение 11. Моделирование отражения от произвольной поверхности в методе Монте-Карло.....	235
Приложение 12. Геометрические соотношения для сферической атмосферы.....	238
Заключение.....	251
Литература.....	253

## Введение

В пособии изложены численные методы, используемые для расчета полей солнечного и теплового излучения в атмосфере Земли (планет). Необходимость такого специализированного изложения диктуется разнообразностью и достаточной сложностью указанных методов. В результате, в рамках учебных курсов по атмосферной оптике и теории переноса излучения можно дать лишь их краткий обзор, что приводит к “дистанции огромного размера” между теоретическими знаниями обучающихся и их способностью практически реализовать эти знания в виде компьютерных моделей и расчетов. Кроме того, прикладное изложение методов моделирования полей излучения, доведенное до уровня реальных алгоритмов, разбросано по различным монографиям и даже научным статьям, что существенно усложняет их освоение. Поэтому, второй задачей данного пособия является объединение указанной информации в рамках одного издания, в единой терминологии и в форме, адаптированной для восприятия учащимися.

В настоящее время существуют уже готовые мощные компьютерные средства решения рассматриваемых в пособии задач – радиационные коды [2]. Их обзор и соответствующие ссылки не приводятся, чтобы не создавать рекламу (антирекламу) конкретным кодам и не обижать авторов неупомянутых. Возникает вопрос о необходимости данной книги в указанном контексте. Конечно же, не следует отказываться от готовых компьютерных средств вычислений. Однако следует использовать их не слепо, а с пониманием сути и особенностей каждого конкретного метода, в частности, его недостатков. К тому же никакие из уже существующих компьютерных кодов не в состоянии охватить весь круг вычислительных задач теории переноса, которые постоянно возникают и усложняются на практике. В этом смысле пользователь готовых кодов оказывается зависимым от их возможностей (а так же, заметим, от разработчиков), а эта зависимость сужает свободу в постановке и решении прикладных задач (не код создается под задачу, а условия задачи вынуждено подгоняются под имеющийся в наличии код). Это все же диктует необходимость написания специального пособия, содержащего не обзор кодов, а изложение собственно вычислительных методов расчета полей излучения в атмосфере. Отметим еще, что одной из целей пособия была демонстрация относительной простоты большинства методов, что позволяет человеку, владеющему навыками программирования, самостоятельно реализовывать их на компьютере, адаптируя под конкретные особенности возникающих задач.

Данное пособие может рассматриваться как дополнение к базовому курсу лекций кафедры физики атмосферы физического факультета СПбГУ “Введение в теоретическую атмосферную оптику”, в частности сохраняет всю соответствующую терминологию и систему обозначений (несколько устаревшую). При этом, однако, оно может изучаться полностью автономно: вся необходимая исходная информация из базового курса в него включена (в сокращенном, справочном виде). Как и в базовом курсе, для облегчения обучения, в качестве основной рассматривается задача расчета полей излучения в плоскопараллельном приближении и без учета поляризации. Затем, в заключительных главах, когда основные численные методы уже изучены, рассматривается возможность их адаптации для сферической атмосферы и поляризованного излучения.

Данное пособие подготовлено на основе курса лекций, читаемых на кафедре физики атмосферы физического факультета СПбГУ, а также с учетом

личного опыта авторов в области математического моделирования полей излучения в атмосфере.

Изложение материала в пособии ведется предельно конкретно, вплоть до приведения вычислительных схем соответствующих алгоритмов. Как отмечено выше, одна из основных задач пособия – обучение учащихся самостоятельному решению вычислительных задач теории переноса излучения. При этом допускается вариант, что пособие будет использовано для изучения и практической реализации какого-то одного конкретного метода. Это определило особенности стиля изложения – предельно возможная автономность как в рамках всего пособия, так и в отдельных его главах.

В первой главе осуществляется постановка основных вычислительных задач расчета интенсивностей и потоков солнечного и теплового излучения в атмосфере, рассматриваются вычислительные алгоритмы для случаев отсутствия рассеяния.

Вторая глава посвящена изложению необходимых сведений о многократном рассеянии излучения в атмосфере и взаимодействии его с отражающей поверхностью планеты. Здесь же подробно описывается метод последовательных порядков рассеяния.

В третьей главе излагаются классические численные методы теории переноса, основанные на разложении по азимутальным гармоникам: методы сферических гармоник, дискретных ординат и сложения слоев.

Четвертая глава посвящена методу Монте-Карло. Подробно излагаются вопросы статистического моделирования на компьютере процессов распространения излучения в атмосфере, схемы алгоритмов вычисления полусферических потоков и интенсивностей.

В пятой главе рассматриваются вопросы спектрального интегрирования интенсивности монохроматического излучения. Этот материал обычно остается вне рамок работ по теории переноса, однако он крайне необходим при практических расчетах. В частности, подробно излагается k-метод и метод Монте-Карло, как способ спектрального интегрирования.

Материал шестой и седьмой глав не входит в курс лекций, на основе которого писалось пособие. Однако его следует включить его ради полноты материала. Эти главы являются дополнительными, факультативными. Тем не менее, можно рекомендовать ознакомиться с их материалом, хотя бы ради повторения пройденного и более общего взгляда на возможности численных методов.

Шестая глава посвящена вопросам учета поляризации излучения. Рассматривается описание поляризованного излучения в оптике атмосферы и методы расчета его характеристик (параметров Стокса), в том числе, и в задачах с многократным рассеянием излучения.

В главе седьмой описываются такие дополнительные возможности рассмотренных численных методов, как учет сферической геометрии атмосферы, атмосферной рефракции, оптического взаимодействия атмосферы с водной средой, учет горизонтальных неоднородностей атмосферы и поверхности.

В двенадцать Приложений вынесен материал, необходимый для полной практической реализации рассматриваемых численных методов, но имеющий чисто технический характер.

# 1. Постановка основных вычислительных задач. Случай отсутствия рассеяния

## 1.1. Формальная модель оптических измерений

### Цели и задачи моделирования оптических измерений в атмосфере

В настоящее время можно выделить две основные современные задачи атмосферной оптики: (1) моделирование энергетического режима атмосферы и поверхности Земли; (2) моделирование измерений излучения приборами дистанционного зондирования атмосферы и поверхности.

С решением первой задачи связаны такие важные направления исследований как прогноз погоды и климата. Вторая задача связана с интерпретацией дистанционных измерений (т.е. с определением из них параметров состояния атмосферы и поверхности), для чего необходима математическая модель измерений, где указанные параметры являются входными данными. Это так называемая “прямая задача атмосферной оптики”, без решения которой невозможно решение “обратной задачи”, т.е. получение из измерений интенсивности излучения значений интересующих нас параметров среды (например, концентраций атмосферных газов, температуры атмосферы и поверхности и т.п.).

Ниже будет показано, что при формально-математическом подходе задача моделирования энергетического режима атмосферы может рассматриваться как частный случай задачи моделирования оптических измерений приборами. Соответственно, первым шагом в рамках изучения численных методов теории переноса излучения должна быть математическая модель измерительного прибора.

### Интенсивность излучения

Характеристикой излучения, воздействующей на измерительный прибор, и, следовательно, фиксируемой им, является энергия. Рассмотрим сначала *идеальный* измерительный прибор, имеющий плоский приемный элемент площадью  $d^2S$ , угол зрения вокруг нормали к приемному элементу с телесным углом  $d^2\Omega$ , спектральный диапазон в длинах волн от  $\lambda$  до  $\lambda + d\lambda$  и временной диапазон регистрации сигнала в интервале от  $t$  до  $t + dt$ . Энергия излучения  $dE$ , регистрируемая приемным элементом такого идеального измерительного прибора пропорциональна площади приемного элемента  $d^2S$ , углу зрения  $d^2\Omega$ , спектральному и временному интервалам  $d\lambda$ ,  $dt$ . По определению, коэффициент указанной пропорциональности называется интенсивностью излучения  $I(\lambda, t)$

$$d^6E = I(\lambda, t) d^2S d^2\Omega d\lambda dt, \quad (1.1.1)$$

откуда следует

$$I(\lambda, t) = \frac{\partial^6 E}{\partial^2 S \partial^2 \Omega \partial \lambda \partial t}. \quad (1.1.2)$$

Нужно отметить, что определением интенсивности является именно соотношение (1.1.1), а (1.1.2) – уже его следствие. Кроме того, выражение (1.1.2) является верным при принятии ряда дополнительных предположений. В частности, чтобы дифференцирование по двумерным аргументам  $S$  и  $\Omega$  не носило бы чисто символический смысл, нужно сначала выбрать некоторую систему координат и выразить в ней дифференциалы  $d^2S$  и  $d^2\Omega$ .

Поскольку в соотношениях (1.1.1) и (1.1.2) использованы дифференциалы, интенсивность излучения определена для конкретного момента времени  $t$  и конкретной длины волны  $\lambda$ . Учитывая последнее обстоятельство, говорят о монохроматической интенсивности излучения. Таким образом, интенсивность излучения – векторная величина, относящаяся к каждой точке пространства, направлению, длине волны и моменту времени.

В определении интенсивности излучения (1.1.1) использована длина волны. Можно рассматривать и другие спектральные характеристики: частоту  $f$  или волновое число  $\nu$ . Для пересчета интенсивности из одной системы спектральных единиц в другую следует учитывать, что согласно определению (1.1.1) должно выполняться соотношение

$$I(\lambda, t) d\lambda = I(f, t) df = I(\nu, t) d\nu. \quad (1.1.3)$$

Принимая во внимание связь

$$\lambda = \frac{1}{\nu} = \frac{c}{f}, \quad (1.1.4)$$

где  $c$  – скорость света, легко получить соотношения

$$I(\lambda, t) = \nu^2 I(\nu, t) = \frac{f^2}{c} I(f, t). \quad (1.1.5)$$

### Поток излучения

Важным требованием в определении интенсивности излучения (1.1.1) было падение по нормали излучения на приемную площадку приемного элемента. Пусть теперь падающее на нее излучение отклонено от нормали на угол  $\vartheta$ . Из элементарной геометрии следует [1,2], что в этом случае энергия пропорциональна косинусу угла падения:

$$d^6 E(\vartheta) = I(\vartheta, \lambda, t) \cos \vartheta d^2 S d^2 \Omega d\lambda dt. \quad (1.1.6)$$

Пусть теперь упомянутый выше идеальный прибор имеет не бесконечно малый, а конечный угол зрения  $\Omega$ . Из (1.1.6) легко написать выражение для поступающей на такой прибор энергии

$$d^4 E(\Omega) = d^2 S d\lambda dt \int_{\Omega} \cos \vartheta(\omega) I(\omega, \lambda, t) d^2 \omega, \quad (1.1.7)$$

где интегрирование ведется по всем направлениям  $\omega$  внутри телесного угла  $\Omega$ .

По определению, аналогичному определению интенсивности, поток излучения  $F(\Omega, \lambda, t)$  есть коэффициент пропорциональности между энергией и в телесным углом  $\Omega$ , площадью  $d^2 S$  и интервалами  $d\lambda$  и  $dt$ :

$$d^4 E(\Omega) = F(\Omega, \lambda, t) d^2 S d\lambda dt, \quad (1.1.8)$$

откуда с учетом замечаний, сделанных к выражению (1.1.2), следует

$$F(\Omega, \lambda, t) = \frac{\partial^4 E(\Omega)}{\partial^2 S \partial \lambda \partial t}. \quad (1.1.9)$$

Из соотношения (1.1.7) получается важная формула для выражения потока излучения через интенсивность

$$F(\Omega, \lambda, t) = \int_{\Omega} \cos \vartheta(\omega) I(\omega, \lambda, t) d^2 \omega. \quad (1.1.10)$$

Очевидно, что соотношения (1.1.8) и (1.1.10) определяют монохроматический поток на длине волны  $\lambda$  в момент времени  $t$  и что для пересчета потока в другие спектральные шкалы следует использовать соотношения, аналогичные (1.1.3)-(1.1.5). Менее очевидно, что поток, как и интенсивность, является векторной величиной, поскольку телесный угол  $\Omega$



связан с нормалью к приемной площадке (единственным исключением является полный поток, когда интегрирование в (1.1.10) ведется по всей сфере).

Стоит подчеркнуть, что все реальные приборы измеряют именно поток излучения (а не интенсивность!), хотя бы и в очень малом телесном угле  $\Omega$ .

Для задач энергетики атмосферы важную роль играют полусферические потоки излучения [1,2], где рассматривается горизонтальная (относительно поверхности Земли) площадка, а в качестве углов  $\Omega$  – верхняя и нижняя полусферы. Но поскольку полусферические потоки являются частным случаем в рамках соотношения (1.1.10), нам пока достаточно общего рассмотрения.

### **Формальная модель оптического прибора**

Перейдем теперь к моделированию измерений реальными приборами. Для них, в отличие от рассмотренных выше идеальных случаев, мы уже имеем не бесконечно малые, а конечные величины: площадь приемного элемента  $S$ , угол зрения  $\Omega$  и диапазон длин волн, определяемый спектральным разрешением от  $\lambda$  до  $\lambda + \Delta\lambda$ , а также время регистрации сигнала от  $t$  до  $t + \Delta t$ . Абстрагируясь от конкретных технических особенностей измерений, будем рассматривать прибор как систему преобразования входного сигнала – интенсивности излучения в некий выходной сигнал  $Y$ , который в рамках формальной модели можно не конкретизировать. Реальный прибор может рассматриваться как совокупность описанных выше идеальных, поэтому выходной сигнал определится интегрированием входной интенсивности по величинам  $S$ ,  $\Omega$ ,  $\Delta\lambda$ ,  $\Delta t$ . При этом возможен неодинаковый вклад входных интенсивностей в выходной сигнал по точкам каждого элемента интегрирования, что учтем введением специальной функции преобразования. Окончательно имеем

$$Y = \int_S d^2s \int_{\Omega} d^2\omega \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta\lambda} d\lambda' \int_t^{t+\Delta t} dt' f(s, \omega, \lambda', t') I(s, \omega, \lambda', t'), \quad (1.1.11)$$

где  $I(s, \omega, \lambda', t')$  – определенная в (1.1.1) монохроматическая интенсивность на длине волны  $\lambda'$ , приходящая на точку  $s$  приемного элемента прибора из направления  $\omega$  в момент времени  $t'$ , а  $f(s, \omega, \lambda', t')$  – функция преобразования входного сигнала в выходной, иначе называемая аппаратной функцией прибора.

Отметим, что, во-первых, соотношение (1.1.11) определяет модель прибора как линейную систему преобразования входного сигнала в выходной. Поэтому умножение входной интенсивности на определенный множитель приведет к аналогичному изменению величины  $Y$ . Во-вторых, все параметры прибора (в частности, – аппаратная функция), в рамках конкретного моделирования рассматриваются как заданные. Следовательно, основной задачей является расчет входной монохроматической интенсивности  $I(s, \omega, \lambda', t')$ . В-третьих, выражение (1.1.11) написано для одного элемента измерительного прибора, обычно называемого *каналом*. Для многоканального прибора формальную модель (1.1.11) следует записать для каждого канала отдельно, причем каждый канал может иметь индивидуальную аппаратную функцию.

Все реальные приборы конструируются так, чтобы преобразования входного сигнала по каждой из четырех компонент были независимыми, т.е. чтобы имело место разделение переменных  $f(s, \omega, \lambda', t') = f_s(s) f_{\Omega}(\omega) f_{\lambda}(\lambda') f_t(t')$ , где  $f_s(s)$ ,  $f_{\Omega}(\omega)$ ,  $f_{\lambda}(\lambda')$ ,  $f_t(t')$  – “отдельные” аппаратные функции по площади приемного элемента,

направлению, спектральному и временному интервалам. Пусть теперь по какой-либо из переменных интенсивность излучения в диапазоне интегрирования в (1.1.11) практически не меняется. Тогда, полагая ее константой (по указанной переменной) и вынося из-под интеграла, получаем лишь интеграл от аппаратной функции, конкретное значение которого нас не интересует, так как мы не конкретизируем смысл выходного сигнала  $Y$ . Таким образом для практических задач имеется возможность упрощать модель (1.1.11).

Для всех современных приборов можно пренебречь изменением входной интенсивности на площади приемного элемента, поскольку эта площадь обычно невелика. Для систем, измеряющих солнечное и тепловое излучение атмосферы и поверхности, входная интенсивность практически не меняется в пределах времени регистрации сигнала. Таким образом, в (1.1.11) можно рассматривать лишь интегрирование по направлениям и длинам волн. Остановимся на них подробнее.

### Задачи расчета полусферических потоков

Итак, соотношение (1.1.11) можно переписать в виде

$$Y = \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta\lambda} f_{\lambda}(\lambda') \int_{\Omega} f_{\Omega}(\omega) I(\omega, \lambda') d^2\omega d\lambda'. \quad (1.1.12)$$

Для полусферических потоков, сравнивая (1.1.12) с (1.1.10), получаем  $f_{\lambda}(\lambda') \equiv 1$ , если  $\lambda \leq \lambda' \leq \lambda + \Delta\lambda$ ,  $f_{\lambda}(\lambda') \equiv 0$ , если  $\lambda' < \lambda$  или  $\lambda' > \lambda + \Delta\lambda$ , – такая спектральная аппаратная функция называется прямоугольной, а  $f_{\Omega}(\omega) = \cos \vartheta$  – так называемая косинусная зависимость аппаратной функции, где  $\vartheta$  – зенитный угол (т.е. угол отклонения излучения от вертикали). Следовательно задача расчета энергетических характеристик атмосферы – полусферических потоков – формально является частным случаем задачи моделирования измерений оптическим прибором с прямоугольной спектральной и косинусной по направлениям аппаратными функциями. Так для монохроматических полусферических потоков соотношение (1.1.12) дает известные [1,2] формулы

$$\begin{aligned} F^{\downarrow}(\lambda) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} I(\lambda, \vartheta, \varphi) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \\ F^{\uparrow}(\lambda) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} I(\lambda, \vartheta, \varphi) |\cos \vartheta| \sin \vartheta d\vartheta, \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

где  $F^{\downarrow}(\lambda)$  и  $F^{\uparrow}(\lambda)$  – нисходящий (из верхней полусферы) и восходящий (из нижней полусферы) потоки, соответственно,  $\varphi$  – азимутальный угол излучения.

Из (1.1.13) следует, что расчет потоков сводится к расчету интенсивности излучения как функции зенитного угла и азимута излучения по всей сфере. При этом интегрирование по (1.1.13) не содержит какой-либо специфики и проводится по обычным квадратурным формулам (например, формуле трапеций). Отметим, что в некоторых случаях имеется возможность вычислять полусферические потоки непосредственно (не через интенсивности). Они будут рассмотрены в соответствующих местах данного пособия.

### Задачи расчета интенсивности излучения

При моделировании измерений интенсивности по (1.1.12) можно учесть тот факт, что современные приборы имеют очень малый угол зрения  $\Omega$  и в подавляющем большинстве задач можно пренебречь изменением входной интенсивности в диапазоне этого угла. Но это утверждение отнюдь не является

аксиомой и требует проверки модельными расчетами для условий каждой конкретной задачи. Оставляя в (1.1.12) только интегрирование по длине волны, получаем

$$Y = \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta\lambda} f_{\lambda}(\lambda') I(\lambda') d\lambda'. \quad (1.1.14)$$

Тогда важнейшей характеристикой прибора становится функция  $f_{\lambda}(\lambda')$ , которая называется спектральной аппаратной функцией. (Если это очевидно из контекста, уточнение “спектральная” часто опускают).

Из вышеизложенного следует, что основной задачей как моделирования энергетики атмосферы, так и дистанционных измерений является вычисление монохроматической интенсивности в заданном направлении. Прикладным численным методам решения этой задачи и посвящено данное пособие.

### **Спектральное интегрирование**

В ряде случаев, в частности для малых интервалов  $\Delta\lambda$  в видимом диапазоне спектра, также можно пренебречь и изменением интенсивности по спектру. Тогда задача сводится просто к вычислению монохроматической интенсивности. Однако при наличии в спектре линий поглощения атмосферных газов [1,2], входная интенсивность  $I(\lambda')$  меняется достаточно сильно даже на малых  $\Delta\lambda$ . Поэтому задача спектрального интегрирования по (1.1.14) является в общем случае нетривиальной. Соответствующие вопросы будут обсуждаться в гл.5 данного пособия.

Отметим, наконец, что часто в выражении (1.1.14) используют нормированную спектральную аппаратную функцию, а именно

$$f_{n,\lambda}(\lambda') = f_{\lambda}(\lambda') \bigg/ \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta\lambda} f_{\lambda}(\lambda') d\lambda'. \text{ Такое преобразование выполняется для придания}$$

смысла выходному сигналу  $Y$ , поскольку теперь он становится интенсивностью (немонохроматической!), измеряемой прибором:

$$I = \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta\lambda} f_{n,\lambda}(\lambda') I(\lambda') d\lambda'. \quad (1.1.15)$$

Именно выражение (1.1.15), как правило, используется в конкретных прикладных задачах.

## **1.2. Ослабление излучения в атмосфере. Расчеты оптической толщины**

### **Проблема переноса излучения**

Как было показано выше, основной вычислительной задачей в нашей тематике является расчет монохроматической интенсивности излучения в точке измерений, т.е. на входе прибора. Эта интенсивность формируется источниками излучения, которые принято называть собственными источниками и характеристики которых будем считать заданными. Но при прохождении через атмосферу излучение взаимодействует с ней по пути от источника до приемника. Учет этого взаимодействия (иначе говоря, пересчет интенсивности излучения по пути от источника до приемника) составляет проблему переноса излучения.

Обратим особое внимание, что при этом все параметры атмосферы и поверхности, определяющие взаимодействие их с излучением, считаются

известными (заданными). В настоящее время для их получения используются различные модели атмосферы и поверхности, содержащие в частности профили концентраций газов и аэрозолей. Собственно коэффициенты взаимодействия вычисляются по этим моделям, иногда весьма непростыми расчетами. Но в рамках данного пособия методики этих вычислений не рассматриваются, а все необходимые коэффициенты взаимодействия излучения с веществом среды мы будем считать заранее заданными. (Некоторые вопросы их вычислений рассмотрены в [1,2].)

Резюмируя, задача ставится следующим образом. Заданы интенсивность собственных источников излучения и все параметры взаимодействия излучения с атмосферой и поверхностью. Требуется найти интенсивность монохроматического излучения на входе измерительного прибора (т.е. в определенной точке пространства и в определенном направлении).

#### **Дифференциальное уравнение переноса излучения**

Из определения интенсивности (1.1.1) и закона сохранения энергии следует дифференциальное уравнение переноса излучения [1,2]

$$\frac{dI}{dl} = -\alpha I + \varepsilon, \quad (1.2.1)$$

где  $l$  – координата вдоль трассы распространения излучения,  $\alpha$  – объемный коэффициент ослабления среды (атмосферы),  $\varepsilon$  – объемный коэффициент излучения среды. Отметим, что все величины в (1.2.1) являются монохроматическими, т.е. определены для конкретной длины волны излучения. Здесь и далее, чтобы не загромождать формулы, договоримся зависимость величин от  $\lambda$  в явном виде не указывать. (Но не забывая о ее присутствии).

#### **Закон Бугера**

Начнем с простейшего случая отсутствия в среде собственного излучения, т.е. случая  $\varepsilon = 0$ . Тогда дифференциальное уравнение (1.2.1) является однородным и имеет решение

$$I(l) = I(l_0) \exp\left(-\int_{l_0}^l \alpha(l') dl'\right), \quad (1.2.2)$$

где  $l_0$  – координата источника излучения, а  $I(l_0)$  – его интенсивность. Соотношение (1.2.2) известно как закон Бугера: в поглощающей среде интенсивность излучения по пути от источника ( $I(l_0)$ ) до приемника ( $I(l)$ ) убывает экспоненциально.

#### **Функция пропускания**

Удобно ввести функцию пропускания среды как коэффициент указанного убывания

$$P(l_0, l) = \exp\left(-\int_{l_0}^l \alpha(l') dl'\right). \quad (1.2.3)$$

Таким образом, задача вычисления интенсивности излучения в случае  $\varepsilon = 0$  сводится к расчету функции пропускания (1.2.3).

#### **Оптический путь**

Стоящий в показателе экспоненты в законе Бугера, интеграл от объемного коэффициента ослабления вдоль трассы распространения излучения называется оптическим путем

$$\tau(l_0, l) = \int_{l_0}^l \alpha(l') dl'. \quad (1.2.4)$$

Тогда

$$P(l_0, l) = \exp(-\tau(l_0, l)), \quad (1.2.5)$$

Т.е. в поглощающей среде все свелось к расчету оптического пути.

### **Плоскопараллельная модель атмосферы**

Будем использовать классическую плоскопараллельную геометрию переноса излучения [1,2], в которой атмосфера считается бесконечным по горизонтали плоским слоем, ограниченным нижней границей (на ней поверхность) и верхней границей (условная высота). В такой модели естественной является вертикальная высота  $z$ . Источники излучения будем считать размещенными на границах – верхней (например, излучение Солнца) и нижней (излучение, отраженное от поверхности, и собственное излучение поверхности).

Рассмотрим для определенности сначала случай источника на верхней границе. Обозначим угол отклонения его излучения от зенита, т.е. зенитный угол, как  $\vartheta$ . Высоты границ атмосферы обозначим  $z_0$  на нижней и  $z_\infty$  на верхней. Приемник излучения может располагаться на любой высоте  $z$  внутри атмосферы ( $z_0 \leq z \leq z_\infty$ ). Переходя в выражениях (1.2.1)-(1.2.5) от координаты точки на трассе распространения излучения  $l$  к высоте  $z$ , получаем выражения для функции пропускания в плоскопараллельной атмосфере

$$P(z_\infty, z, \vartheta) = \exp\left(-\frac{1}{\cos \vartheta} \tau(z_\infty, z)\right) \quad (1.2.6)$$

$$\tau(z_\infty, z) = \int_z^{z_\infty} \alpha(z') dz'. \quad (1.2.7)$$

Величина  $\tau(z_\infty, z)$ , определенная по (1.2.7), называется оптической толщиной слоя атмосферы между высотами  $z_\infty$  и  $z$ . Именно к ее вычислению свелась задача расчета функции пропускания (1.2.6).

### **Дискретная модель атмосферных параметров**

Для вычисления оптической толщины слоев атмосферы должна быть задана функция  $\alpha(z)$ . Подобные вертикальные зависимости параметров атмосферы принято называть “вертикальные профили” или просто “профили”. Таким образом, требуется задание профиля объемного коэффициента ослабления.

Практически во всех современных вычислительных задачах оптики атмосферы вертикальные профили параметров задаются дискретно, т.е. в виде таблицы значений на некоторых высотах. В дальнейшем в данном пособии именно такие дискретные модели будут рассматриваться.

Пусть в атмосфере выбрано  $N$  высотных уровней  $z_i$ ,  $i=1, \dots, N$ , причем  $z_1 = z_0$  (высота нижней границы) и  $z_N = z_\infty$  (высота верхней границы). Отметим, что число слоев атмосферы на единицу меньше, т.е.  $N-1$ . На высотах указанных уровней задаем значения объемного коэффициента ослабления  $\alpha_i$ , т.е. задана таблица  $\alpha_i(z_i)$ ,  $i=1, \dots, N$ . Здесь последний раз подчеркнем, что эта таблица исходно задана по условиям задачи. Набор высот таблицы  $z_i$  называется вертикальной сеткой модели атмосферы.

### Квадратурная формула трапеций

При табличном задании функции естественно для ее интегрирования использовать какие-либо квадратурные формулы (с узлами – точками таблицы). В данном пособии мы будем использовать формулу трапеций, которая является простой и удобной для дискретных профилей атмосферных параметров и хорошо зарекомендовала себя в практических вычислениях.

Пусть необходимо численно рассчитать величину интеграла  $\int_a^b f(x')dx'$ .

При разбиении интервала интегрирования  $N$  точками (т.е. на  $N-1$  подынтервалов в общем случае не обязательно считающихся равными)  $y_i(x_i)$ ,  $i=1, \dots, N$ ,  $x_1=a$ ,  $x_2=b$  использование квадратурной формулы трапеций приводит к оценке

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{2}(y_{i+1}+y_i)(x_{i+1}-x_i). \quad (1.2.8)$$

Формула вида (1.2.8) не совсем удобна для практических вычислений, поскольку точки функции  $y_i$  участвуют в ней по два раза. Если сама функция  $y$  требует сложных и громоздких расчетов, это замедлит вычисления и/или усложнит алгоритм, поскольку придется хранить в памяти предыдущее ее значение. Поэтому рекомендуется использовать менее очевидную, но более эффективную форму формулы трапеций, где суммирование идет не по интервалам, а по точкам разбиения.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^N y_i d_i, \quad d_i = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i), & \text{если } i=1 \\ \frac{1}{2}(x_{i+1}-x_{i-1}), & \text{если } 1 < i < N \\ \frac{1}{2}(x_i-x_{i-1}), & \text{если } i=N \end{cases} \quad (1.2.9)$$

Предлагаем получить (1.2.9) из (1.2.8) в качестве упражнения.

#### Расчет оптической толщины слоя атмосферы

В качестве первого применения формулы трапеций (1.2.9) рассмотрим расчет оптической толщины всей атмосферы, т.е.  $\tau(z_\infty, z_0)$ . Непосредственно имеем

$$\tau(z_\infty, z_0) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(z_i) d(z_i), \quad (1.2.10)$$

где  $d(z_i)$  – веса точек высотной сетки, получаемые по (1.2.9) (с заменой  $x$  на  $z$ ). Договоримся здесь и далее в квадратурных формулах писать строгое равенство вместо приближенного.

Однако наша задача несколько сложнее. Следует учесть, что в общем случае точка измерений  $z$  вовсе не обязана совпадать с одним из узлов вертикальной сетки  $z_i$ . Тогда требуется написать квадратурную формулу для вычисления функции  $\tau(z_\infty, z)$  более общего вида для произвольной высоты  $z$ .

По условиям задачи высота  $z$  лежит внутри атмосферы. Поэтому в высотной сетке всегда найдется такой номер  $i$ , для которого  $z_i \leq z \leq z_{i+1}$ . (Поиск номера  $i$  может не потребоваться в стандартных случаях точки измерения на

верхней или нижней границах атмосферы.) В принципе, поиск можно вести простым перебором по массиву высот. Однако эффективным алгоритмом является метод половинного деления, который приведен в Приложении 1.

Для нахождения значения объемного коэффициента ослабления в точке  $z$  внутри слоя для использования в формуле трапеций логично воспользоваться линейной интерполяцией:

$$\alpha(z) = \alpha_i(z_i) + \frac{\alpha_{i+1}(z_{i+1}) - \alpha_i(z_i)}{z_{i+1} - z_i} (z - z_i) = \alpha_i(z_i) \frac{z_{i+1} - z}{z_{i+1} - z_i} + \alpha_{i+1}(z_{i+1}) \frac{z - z_i}{z_{i+1} - z_i}. \quad (1.2.11)$$

Теперь оптическая толщина  $\tau(z_\infty, z)$  от точки  $z_\infty$  до точки  $z_{i+1}$  вычисляется по “обычной” формуле трапеций (1.2.9), а затем к ней надо добавить еще интеграл от точки  $z_{i+1}$  до точки  $z$ , т.е. величину  $\frac{1}{2}(\alpha_{i+1}(z_{i+1}) + \alpha(z))(z_{i+1} - z)$ . Окончательный вид общей формулы удобно также написать в квадратурном виде (1.2.9), учитывая точки от  $i$  до  $N$ , для чего “соберем” с учетом (1.2.11) дополнительные веса в точках  $i$  и  $i+1$ . По причине, которая будет объяснена ниже, для гарантии неотрицательности разностей высот используем модули. В итоге получаем

$$\tau(z_\infty, z) = \sum_{j=i}^N \alpha_j(z_j) d(z_j),$$

$$d(z_j) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{(z_{j+1} - z)^2}{|z_{j+1} - z_j|}, & \text{если } j = i \\ \frac{1}{2} |z_j - z| \frac{|z + z_j - 2z_{j-1}|}{|z_j - z_{j-1}|}, & \text{если } j = i+1 = N \\ \frac{1}{2} |z_j - z| \frac{|z + z_j - 2z_{j-1}|}{|z_j - z_{j-1}|} + \frac{1}{2} |z_{j+1} - z_j|, & \text{если } j = i+1 < N \\ \frac{1}{2} |z_{j+1} - z_{j-1}|, & \text{если } i+1 < j < N \\ \frac{1}{2} |z_j - z_{j-1}|, & \text{если } j = N \text{ и } N > i+1 \end{cases} \quad (1.2.12)$$

Вот к каким, отнюдь не очевидным соотношениям приводит казалось бы простая задача вычисления оптической толщины. Отметим, что можно ставить подобным образом и задачу самого общего вида, когда внутри слоев атмосферы лежат как начальная, так и конечная точка интегрирования. Однако для рассматриваемого в пособии класса задач такая постановка уже излишняя. Предлагаем читателю ее в качестве упражнения.

### **Кусочно-аналитические аппроксимации вертикальных профилей**

Выше в (1.2.11) мы использовали линейную интерполяцию, т.е. определенное предположение о зависимости объемного коэффициента ослабления от высоты внутри слоя. Рассмотрим этот прием подробнее.

Принимая подобную простую аналитическую зависимость для каждого из слоев атмосферы, т.е. как кусочную функцию во всей атмосфере, и интегрируя ее по высоте, можно получить явные аналитические выражения для оптической толщины каждого слоя. Но тогда задача расчета оптической толщины  $\tau(z_\infty, z)$  для  $z_i \leq z < z_{i+1}$  сведется к вычислению суммы

$$\tau(z_\infty, z) = \tau(z_{i+1}, z) + \sum_{j=i+2}^N \tau(z_j, z_{j-1}), \quad (1.2.13)$$

причем для (1.2.13) легко построить рекуррентный алгоритм

$$\begin{aligned} \tau(z_{j+1}, z) &= \tau(z_j, z) + \tau(z_{j+1}, z_j), \\ j &= i, \dots, N-1, \quad \tau(z_i, z) = 0, \quad \tau(z_{i+1}, z_i) \equiv \tau(z_{i+1}, z). \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

Т.е. после вычисления оптической толщины начального слоя  $\tau(z_{i+1}, z)$  нужно прибавлять к ней оптические толщины последующих слоев, пока не дойдем до последнего слоя в атмосфере. Отметим, что в отличие от (1.2.12), где промежуточные суммы лишены физического смысла, в (1.2.14) мы на каждом шаге итерации имеем реальную оптическую толщину.

Таким образом, преимущества кусочно-аналитических аппроксимаций налицо. В качестве конкретных их случаев уместно рассмотреть три следующие.

Кусочно-постоянная. Полагаем, что внутри слоя объемный коэффициент ослабления постоянен. За значение константы обычно принимают либо значение на одной из границ слоя, либо их среднее. В последнем случае имеем

$$\alpha(z) = \frac{1}{2}(\alpha_i(z_i) + \alpha_{i+1}(z_{i+1})), \quad \tau(z_{i+1}, z) = \frac{1}{2}(\alpha_i(z_i) + \alpha_{i+1}(z_{i+1})) |z_{i+1} - z|, \quad (1.2.15)$$

что соответствует формуле трапеций.

Кусочно-линейная. Это уже рассмотренная выше линейная интерполяция, т.е. зависимость (1.2.11). Интегрируя ее по  $z$ , получаем

$$\tau(z_{i+1}, z) = \left| \frac{\alpha_i(z_i)z_{i+1} - \alpha_{i+1}(z_{i+1})z_i}{z_{i+1} - z_i} (z_{i+1} - z) + \frac{1}{2} \frac{\alpha_{i+1}(z_{i+1}) - \alpha_i(z_i)}{z_{i+1} - z_i} (z_{i+1}^2 - z^2) \right|. \quad (1.2.16)$$

Зависимость (1.2.16) уже квадратичная. Однако для линейной функции  $\alpha(z)$  она, очевидно, опять переходит в формулу трапеций для полного слоя, в чем несложно убедиться при подстановке  $z = z_i$  в (1.2.16).

Кусочно-экспоненциальная. Полагая, что объемный коэффициент внутри слоя меняется по экспоненте, получаем

$$\alpha(z) = \exp \left( \ln \alpha_i(z_i) + \frac{\ln \alpha_{i+1}(z_{i+1}) - \ln \alpha_i(z_i)}{z_{i+1} - z_i} (z_{i+1} - z) \right) = \alpha_i(z_i) \left( \frac{\alpha_{i+1}(z_{i+1})}{\alpha_i(z_i)} \right)^{\frac{z_{i+1} - z}{z_{i+1} - z_i}}. \quad (1.2.17)$$

Зависимость (1.2.17) наиболее оправдана физически, поскольку концентрации газов и аэрозолей в атмосфере, определяющие объемный коэффициент ослабления [1,2], обычно убывают с высотой экспоненциально. За исключением особого случая  $\alpha_{i+1}(z_{i+1}) = \alpha_i(z_i)$ , который соответствует рассмотренному выше случаю кусочно-постоянной функции, интегрируя (1.2.17), после несложных преобразований, которые рекомендуем проделать в качестве упражнения, получаем



$$\tau(z_{i+1}, z) = \left| \frac{\alpha_i(z_i)(z_{i+1} - z_i)}{\ln\left(\frac{\alpha_{i+1}(z_{i+1})}{\alpha_i(z_i)}\right)} \left( \left( \frac{\alpha_{i+1}(z_{i+1})}{\alpha_i(z_i)} \right)^{\frac{z_{i+1}-z}{z_{i+1}-z_i}} - 1 \right) \right|. \quad (1.2.18)$$

Для полного слоя в выражении (1.2.18) при  $z = z_i$  имеем

$$\tau(z_{i+1}, z_i) = \frac{(\alpha_{i+1}(z_{i+1}) - \alpha_i(z_i)) |z_{i+1} - z_i|}{\ln\left(\frac{\alpha_{i+1}(z_{i+1})}{\alpha_i(z_i)}\right)}. \quad (1.2.19)$$

### «Переворот атмосферы»

До сих пор мы рассматривали задачу вычисления оптической толщины слоя от верхней границы до заданной высоты  $z$ . Как отмечалось выше, другой аналогичной задачей является положение источника излучения на нижней границе атмосферы, т.е. вычисление оптической толщины слоя от нижней границы до заданной высоты  $\tau(z_0, z)$ . В принципе, несложно повторить для указанного случая все приведенные рассуждения и получить необходимые формулы. Однако это излишне. Воспользуемся простым и эффективным приемом “переворота атмосферы”.

Для заданной таблицы вертикального профиля объемного коэффициента ослабления  $\alpha_k(z_k)$ ,  $k=1, \dots, N$ , где мы специально поменяли переменную индекса, воспользуемся подстановкой  $i = N - k + 1$  и перейдем с ее использованием к таблице  $\alpha_i(z_i)$ ,  $i=1, \dots, N$ . Такая таблица соответствует перевернутой атмосфере, для которой границы поменялись местами:  $z_{i=1} = z_\infty$ ,  $z_{i=N} = z_0$ . Но тогда для источника на нижней границе мы можем напрямую использовать все полученные выше расчетные формулы (1.2.11)-(1.2.19), находя по индексу  $i$  индекс  $k$  исходной таблицы ( $k = N - i + 1$ ). Единственным отличием теперь становится необходимость упорядоченности высот в порядке убывания. Но это мы учли, используя модули разностей при вычислении интегралов. Другим существенным удобством переворота является переход угла направления излучения  $\mathcal{G}$  в формуле для функции пропускания (1.2.6) из стандартно задаваемого для поверхности надирного (отклонения от нормали) к зенитному. Таким образом,  $\cos \mathcal{G}$  в формуле (1.2.6) остается положительным.

## 1.3. Расчет интенсивности монохроматического теплового излучения

### Интенсивность собственного излучения атмосферы

Вернемся к дифференциальному уравнению переноса излучения (1.2.1) и рассмотрим его случай при не равном нулю объемном коэффициенте излучения ( $\varepsilon \neq 0$ ), что соответствует наличию в каждой точке среды (атмосферы) собственных источников излучения. Простейшим примером такого излучения является тепловое излучение атмосферы в инфракрасном (ИК) диапазоне [1,2].

В случае собственного излучения уравнение переноса (1.2.1) также имеет общее решение [1,2]

$$I(l) = I(l_0) \exp\left(-\int_{l_0}^l \alpha(l') dl'\right) + \int_{l_0}^l \varepsilon(l') \exp\left(-\int_{l'}^l \alpha(l'') dl''\right) dl', \quad (1.3.1)$$

которое сразу удобно записать через функцию пропускания (1.2.3) с учетом ее выражения для оптического пути (1.2.4)

$$I(l) = I(l_0)P(l_0, l) + \int_{l_0}^l \varepsilon(l')P(l', l)dl'. \quad (1.3.2)$$

В выражении (1.3.2) для решения (1.3.1) становится очевидным простой физический смысл: первое слагаемое, как и прежде, описывает ослабление излучения от внешнего источника ( $I(l_0)$ ) по закону Бугера, а второе слагаемое – это сумма собственного излучения с источниками  $\varepsilon(l')$  в каждой точке среды  $l'$ , которое также ослабляется по пути от этой точки до приемника (точка  $l$ ) по закону Бугера.

Для плоскопараллельной модели атмосферы, рассматривая для определенности излучение от источника на верхней границе с зенитным углом  $\vartheta$ , из (1.3.2) получаем

$$I(z, \vartheta) = I(z_\infty)P(z_\infty, z, \vartheta) + \frac{1}{\cos \vartheta} \int_z^{z_\infty} \varepsilon(z')P(z', z, \vartheta)dz', \quad (1.3.3)$$

где функция пропускания вида  $P(z_1, z_2, \vartheta)$  определена соотношениями (1.2.6)-(1.2.7) (с формальной подстановкой нужных высот).

Сразу отметим, что расчету функции пропускания был посвящен предыдущий раздел 1.2, поэтому после введения дискретной модели атмосферы и применения квадратурной формулы трапеций задача вычислений по (1.3.3), в принципе, уже решена. Рассмотрим, однако, возникающую здесь специфику.

#### **Равновесное тепловое излучение**

Важнейшим случаем собственного излучения атмосферы является тепловое. Наиболее простое его описание соответствует случаю равновесного теплового излучения, что приводит в оптике атмосферы к приближению локального термодинамического равновесия (ЛТР) [1,2]. В данном пособии мы будем рассматривать только этот случай. В условиях ЛТР в каждой точке среды выполняется закон Кирхгофа, согласно которому

$$\varepsilon_\lambda(z) = k_\lambda(z)B_e(\lambda, T(z)), \quad (1.3.4)$$

где  $k_\lambda(z)$  – объемный коэффициент поглощения,  $T(z)$  – кинетическая температура,  $B_e(\lambda, T)$  – функция Планка

$$B_e(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(c_2/\lambda T) - 1}, \quad (1.3.5)$$

$\lambda$  – длина волны излучения,  $c$  – скорость света,  $h$  – постоянная Планка,  $c_2 = \frac{hc}{k_B}$  – вторая радиационная постоянная,  $k_B$  – постоянная Больцмана. Индекс

$\lambda$  у объемных коэффициентов в законе Кирхгофа нам пришлось написать из-за явного использования длины волны в функции Планка, памятуя, что все величины здесь – монохроматические.

В (1.3.5) функция Планка выражена через длину волны, ее выражения через частоту и волновое число, как и для интенсивности, определяются соотношениями вида (1.1.5). Подробно различные виды функции Планка рассмотрены в [2]. Известны два предельных случая функции Планка: приближение Вина при малых  $\lambda$  и Релея-Джинса при больших. Последнее

часто используется в дальней ИК и микроволновой (МКВ) спектральных областях и для (1.3.5) имеет вид

$$B_e(\lambda, T) = \frac{2k_B T c}{\lambda^4}. \quad (1.3.6)$$

При практических расчетах по функции Планка могут возникать вычислительные трудности вроде умножения большой величины на малую. Специальный алгоритм, позволяющий их избегать, приведен в Приложении 2.

### **Интенсивность теплового излучения в нижнюю полусферу при ЛТР**

Применяя теперь закон Кирхгофа для выражения интенсивности теплового излучения от верхней границы атмосферы (1.3.3), получаем при ЛТР

$$I_\lambda(z, \vartheta) = I_\lambda(z_\infty)P_\lambda(z_\infty, z, \vartheta) + \frac{1}{\cos \vartheta} \int_z^{z_\infty} k_\lambda(z')B_e(\lambda, T(z'))P_\lambda(z', z, \vartheta)dz'. \quad (1.3.7)$$

При использовании (1.3.7) для теплового излучения обычно пренебрегают вкладом рассеяния в общее ослабление излучения, учитывая только его поглощение. Будем следовать этой практике. Тогда объемный коэффициент ослабления  $\alpha$  в формулах оптической толщины из раздела 1.2 просто формально заменяется на объемный коэффициент поглощения  $k$ . Таким образом для расчета интенсивности теплового излучения по (1.3.7) необходимо задать вертикальные профили объемного коэффициента поглощения  $k_\lambda(z)$  и температуры воздуха  $T(z)$ . Для рассматриваемого случая теплового излучения, идущего с верхней границы атмосферы, обычно полагают также  $I_\lambda(z_\infty) = 0$ . Хотя для МКВ диапазона в ряде случаев учитывают реликтовое космическое излучение с температурой  $T_\infty$  (равной 2.7К), для которого  $I_\lambda(z_\infty) \equiv B_e(\lambda, T_\infty)$  вычисляется по (1.3.5) или (1.3.6).

Заметим теперь, что с учетом выражений для функции пропускания (1.2.6)-(1.2.7) соотношение (1.3.7) при обсуждавшемся условии  $\alpha = k$  может быть записано в виде

$$I_\lambda(z, \vartheta) = I_\lambda(z_\infty)P_\lambda(z_\infty, z, \vartheta) - \int_z^{z_\infty} B_e(\lambda, T(z')) \frac{\partial P_\lambda(z', z, \vartheta)}{\partial z'} dz'. \quad (1.3.8)$$

При практических расчетах использование (1.3.8) означает необходимость интегрировать не по высоте, а непосредственно по вертикальному профилю функции пропускания, принимая ее за переменную интегрирования.

### **Выбор вычислительной формулы**

Обратим внимание на очень важный момент. Получены две альтернативные формулы для интенсивности теплового излучения (1.3.7) и (1.3.8). Какую выбрать для практического применения?

Рассмотрим пример. Пусть объемный коэффициент поглощения очень большой –  $10^5 \text{ км}^{-1}$ , а атмосфера однородна, т.е. ее параметры (в частности, температура  $T$ ) не меняются с высотой. Тогда можно трактовать атмосферу как один слой с постоянными параметрами. Пусть толщина этого слоя 100 км. Положим  $\vartheta = 0$ ,  $I_\lambda(z_\infty) = 0$  и найдем интенсивность теплового излучения на нижней границе атмосферы.

Из физических соображений ответ очевиден – среда практически непрозрачная. Значит, искомая интенсивность равна ее тепловому излучению на нижней границе, т.е.  $I_\lambda = B_e(\lambda, T(z_0)) = B_e(\lambda, T)$ .

Теперь вычисляем интенсивность излучения по формуле трапеций, используя выражение (1.3.7). Экспонента в функции пропускания на нижней границе атмосферы даст единицу, а на верхней – практически нуль. Имеем

$$I_\lambda = \frac{1}{2}(k_\lambda(z_\infty)B_e(\lambda, T(z_\infty)) \cdot 0 + k_\lambda(z_0)B_e(\lambda, T(z_0)) \cdot 1)(z_\infty - z_0) = 0.5 \cdot 10^5 \cdot B_e(\lambda, T) \cdot 100.$$

Итак,  $I_\lambda = 5 \cdot 10^6 B_e(\lambda, T)$ .

Используем для вычислений формулу (1.3.8) с интегрированием по функции пропускания и получаем

$$I_\lambda = -\frac{1}{2}(B_e(\lambda, T(z_\infty)) + B_e(\lambda, T(z_0))(P(z_\infty, z_0) - P(z_0, z_0))) = B_e(\lambda, T)(1 - 0) = B_e(\lambda, T).$$

Таким образом, при использовании (1.3.8) мы получили правильный результат, а при использовании (1.3.7) – грубо ошибочный (в пять миллионов раз!!) и физически бессмысленный – интенсивность излучения на выходе из среды оказалась больше интенсивности внутри нее. Следовательно для практических расчетов необходимо всегда использовать формулу (1.3.8) и никогда не использовать (1.3.7).

Отметим на этом простом примере общее правило: *теоретически безупречные формулы еще не гарантируют возможности их прямого применения в практических расчетах*. Нередко требуются преобразования теоретических формул, не всегда простые и очевидные, чтобы избежать проблем при практических вычислениях.

#### **Алгоритм расчета интенсивности теплового излучения**

Имеем заданную дискретную модель атмосферы в виде таблицы профилей объемного коэффициента поглощения на длине волны  $\lambda$  и температуры:  $k_i(\lambda, z_i)$ ,  $T_i(z_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $z_1 = z_0$ ,  $z_N = z_\infty$ .

Алгоритм расчета второго слагаемого в (1.3.8) можно построить в эффективной рекуррентной форме, когда все вычисления осуществляются “в один проход” без предварительного расчета и хранения в памяти профиля функции пропускания.

Рассмотрим еще раз столь знакомую нам формулу трапеций со вкладом в интегральную сумму  $\frac{1}{2}(y_i + y_{i-1})(x_i - x_{i-1})$ . В нашем случае интеграл отрицательный, удобно сразу превратить его в положительный, изменив знак разности:  $\frac{1}{2}(y_i + y_{i-1})(x_{i-1} - x_i)$ . У нас обе переменные не заданы, а вычисляются в каждой соответствующей точке. Распишем вклад точек в интегральную сумму. Для первой точки имеем  $\frac{1}{2}y_{i-1}x_{i-1}$ . Во всех промежуточных точках слагаемое  $-\frac{1}{2}y_i x_i$  сокращается со слагаемым следующей точки  $\frac{1}{2}y_{i-1}x_{i-1}$  (когда номер  $i$  станет номером  $i-1$ ). Таким образом, для вклада в сумму остается  $\frac{1}{2}y_i x_{i-1} - \frac{1}{2}y_{i-1}x_i$ . Для последней точки к этому вкладу надо еще добавить уже несокращаемое слагаемое  $-\frac{1}{2}y_i x_i$ .

Применяя полученные рассуждения к соотношению (1.3.8), получаем следующий алгоритм вычисления  $I_\lambda(z, \mathcal{G})$ .

1) Для заданной высоты  $z$  находим такой интервал, что  $z_i \leq z < z_{i+1}$  (см. раздел 1.2).

2) В первой точке интегрирования ( $z$ ) вычисляем  $B_i = B_e(\lambda, T(z))$  и присваиваем  $I_i = B_i/2$ . Значение  $T(z)$  находим по выбранной кусочно-аналитической аппроксимации профиля температуры (см. предыдущий раздел 1.2). Здесь оптическая толщина равна нулю, а функция пропускания равна единице. Поэтому присваиваем  $\tau_i = 0$ ,  $P_i = 1$ .

3) Для точек  $j = i+1, \dots, N$  вычисляем  $B_j = B_e(\lambda, T(z_j))$ ,  $\tau_j = \tau_{j-1} + \tau(z_j, z_{j-1})$ , учитывая  $\tau(z_{i+1}, z_i) \equiv \tau(z_{i+1}, z)$ ,  $P_j = \exp(-\tau_j / \cos \vartheta)$ . Для вычисления оптических толщин слоев  $\tau(z_j, z_{j-1})$  удобны кусочно-аналитические аппроксимации профилей (раздел 1.2). Суммируем  $I_j = I_{j-1} + B_j P_{j-1} / 2 - B_{j-1} P_j / 2$ .

4) Для последней точки ( $j = N$ ) добавляем  $I = I_N - B_N P_N / 2 + I_\lambda(z_\infty) P_N$ .

5) Значение  $I$  есть искомая интенсивность  $I_\lambda(z, \vartheta)$ , значение  $P_N$  есть функция пропускания  $P_\lambda(z_\infty, z, \vartheta)$ .

### Радиояркая температура

Функция Планка (1.3.5) устанавливает однозначную связь между температурой и интенсивностью излучения. Поэтому интенсивность может выражаться некоторой эквивалентной температурой. Такая температура называется радиояркой (температура абсолютно черного тела, излучающего на данной длине волны с той же интенсивностью, что и некий объект). Нередко, для теплового излучения в качестве характеристики вместо интенсивности используют радиояркую температуру. Особенно она удобна для приближения Релея-Джинса (1.3.6), поскольку в нем функция  $B_e(\lambda, T)$  прямо пропорциональна температуре.

В этом случае для (1.3.6) все дополнительные множители ( $2k_B c / \lambda^4$ ) в левой и правой частях вычислительной формулы (1.3.8) сокращаются, то есть в (1.3.8) можно просто формально положить  $B_e(\lambda, T(z')) \equiv T(z')$ . Таким образом при вычислении радиояркой температуры и использовании приближения Релея-Джинса (1.3.6) достаточно рассматривать непосредственно “перенос температуры”, в том числе в приведенном выше алгоритме.

### Внутренняя сетка вертикального интегрирования

Во всех приводимых выше вычислительных схемах мы не ставили вопрос о точности численного интегрирования. Но он весьма важен, так как формула трапеций, как и любая другая квадратурная формула является приближенной. Известно: чем больше узлов интегрирования, тем точнее результат. В нашем случае число узлов определяется сеткой высот  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , которую мы считаем заранее заданной. Следовательно, казалось бы, ответственность за точность расчетов можно переложить на авторов используемых моделей атмосферы.

Однако, это верно лишь для расчетов оптических толщин и функций пропускания, рассмотренных в разделе 1.2. Для интенсивностей же излучения ситуация иная.

Вернемся еще раз к приведенному выше примеру с выбором формулы для вычислений. Пусть теперь объемный коэффициент поглощения по-прежнему постоянен ( $10^5 \text{ км}^{-1}$ ), но температура зависит от высоты. Тогда для

интенсивности теплового излучения на нижней границе атмосферы имеем  $\frac{1}{2}(B(\lambda, T(z_\infty)) + B(\lambda, T(z_0)))$ . Если температура на верхней границе атмосферы  $T(z_\infty)$  существенно отличается от температуры на нижней  $T(z_0)$ , мы получим значительные отличия результата от правильного значения  $B(\lambda, T(z_0))$ .

Легко понять, в чем причина неверного результата. Функция пропускания на верхней границе равна нулю и, на самом деле, температура  $T(z_\infty)$  вообще никак не должна участвовать в вычислениях. Реально излучение с искомой интенсивностью формируется там, где функция пропускания отлична от нуля. Чтобы “поймать” эту область шаг интегрирования должен быть выбран достаточно малым (в нашем примере – порядка сантиметра). Тогда изменение оптической толщины на каждом шаге будет равно единице и хотя бы первые 10 точек (10 см) повлияют на значение интенсивности. В итоге мы получим верный результат  $B(\lambda, T(z_0))$ , поскольку вряд ли изменение температуры на 10 см от  $z_0$  будет существенным. Достоинство теперь состоит в следующем: в отличие от угаданного по физическому смыслу значения мы указали толщину слоя, в котором реально формируется излучение.

Таким образом, шаг интегрирования по вертикали должен выбираться так, чтобы изменения функции пропускания на нем были незначительными. Ситуация, когда на соседних уровнях она меняется от нуля до единицы, недопустима.

Гарантирует ли выполнение этого условия исходно заданная в модели атмосферы сетка высот? В общем случае, особенно при наличии сильного поглощения, возможны ситуации, что не гарантирует. Таким образом, возникает задача перехода от вертикальной сетки модели атмосферы, которую мы назовем “внешней”, к новой, “внутренней” вертикальной сетке, обеспечивающей заданное малое изменение функции пропускания на соседних уровнях. Сразу заметим, что поскольку объемный коэффициент поглощения может сильно зависеть от длины волны, внутренняя сетка может (должна!) быть различной для разных длин волн.

#### Алгоритмы построения внутренней сетки

Зададим параметр  $\Delta P_{\max}$  – максимально допустимое изменение функции пропускания на соседних высотных уровнях внутренней сетки (стандартно  $0.1 \div 0.01$ ). Тогда, если функция пропускания на какой-то высоте внутренней сетки  $z_l$  равна  $P(z_l, z, \mathcal{G})$ , легко найти оптическую толщину для следующей точки сетки  $z_{l+1}$ , обеспечивающую изменение функции пропускания на  $\Delta P_{\max}$ :

$$\tau(z_{l+1}, z) = -\cos \mathcal{G} \ln(P(z_l, z, \mathcal{G}) - \Delta P_{\max}). \quad (1.3.9)$$

Учитывая, что для стартовой точки интегрирования  $z$  функция пропускания равна единице, по (1.3.9) последовательно находятся оптические толщины внутренней сетки.

Однако, как показывает практика, подобные изящно выглядящие алгоритмы часто оказываются сложными в реализации и неэффективными при вычислениях. Действительно, после определения оптических толщин внутренней сетки по (1.3.9) нам все равно надо перевести ее в сетку высот. А для этого нужны: 1) таблица оптических толщин внешней сетки (предварительно вычисленная), 2) поиск по ней интервалов, соответствующих оптическим толщинам внутренней сетки и 3) нахождение высот из

соотношений кусочно-аналитической аппроксимации (1.2.15)-(1.2.17), которые превращаются в уравнения относительно  $z$ . Кроме того, такая внутренняя сетка оказывается привязанной к конкретному значению зенитного угла  $\mathcal{G}$  и не позволяет, в частности, проводить одновременные расчеты для набора различных значений  $\mathcal{G}$ . В то же время приведенный выше алгоритм расчета интенсивности можно элементарно модифицировать под массив нескольких зенитных углов.

Из практики численных расчетов известно, что за основу для построения внутренней сетки интегрирования удобно брать сетку внешнюю. Конкретно: внутренняя сетка получается добавлением ко внешней дополнительных уровней, обеспечивающих условие изменения функции пропускания не более чем на  $\Delta P_{\max}$ . Найдем из (1.3.9) максимально допустимое приращение оптической толщины между соседними уровнями  $\Delta\tau_{\max}$ , т.е. минимальное значение выражения (1.3.9). Это достигается для стартовой точки, где  $P(z_l, z, \mathcal{G})=1$ , откуда

$$\Delta\tau_{\max} = -\cos \mathcal{G} \ln(1 - \Delta P_{\max}). \quad (1.3.10)$$

Таким образом, в отличие от (1.3.9), максимально допустимое приращение оптической толщины  $\Delta\tau_{\max}$  есть константа (для набора углов  $\mathcal{G}$  достаточно взять в (1.3.10) минимальное значение косинусов).

Теперь легко построить простой алгоритм добавления новых уровней во внешнюю сетку. Если для нее оптическая толщина соседних уровней  $\Delta\tau$  больше, чем  $\Delta\tau_{\max}$ , просто делим данный высотный интервал на такое количество частей, которое обеспечит выполнение необходимого условия не превышать величину  $\Delta\tau_{\max}$ . (Конкретно: на  $\text{int}(\Delta\tau/\Delta\tau_{\max})+1$ , где  $\text{int}()$  – целая часть числа).

Можно заметить, что такое простое деление не еще гарантирует выполнения требуемого условия для кусочно-линейного (1.2.16) и кусочно-экспоненциального (1.2.17) профилей, где зависимость оптической толщины от высоты является нелинейной. Но подчеркнем еще раз, что нашей целью является не получение математически безупречных решений, а построение удобных, простых и эффективных прикладных вычислительных алгоритмов. А для этого рамках указанное замечание легко устранить, просто выбрав для надежности более малое значение  $\Delta P_{\min}$ .

Новым обстоятельством, которое необходимо учесть в подобном алгоритме, является необходимость прекращения интегрирования, когда функция пропускания становится практически равной нулю. Действительно, возвращаясь к нашему примеру с объемным коэффициентом поглощения  $10^5 \text{ км}^{-1}$  и шагом сетки 1 см, если не остановить интегрирование, придется суммировать 10000 точек сетки. Подавляющее большинство из них дадут в сумму нулевой вклад, что крайне неэффективно. Поэтому введем еще один параметр – минимально значимое значение функции пропускания  $P_{\min}$  (стандартно  $10^{-3} \div 10^{-5}$ ) и будем прекращать интегрирование, как только значение функции пропускания станет меньше  $P_{\min}$ .

Отметим, что описанный алгоритм с выбором внутренней сетки и остановкой вычислений может быть реализован в рамках модификации приведенного выше алгоритма расчета интенсивностей. Т.е. в виде суммирования “за один проход” без всяких предварительных вычислений.

Настоятельно рекомендуем выполнить указанную модификацию в качестве упражнения. (Ответ см. в Приложении 3.)

Здесь мы достаточно полно осветили вопросы выбора внутренней сетки интегрирования. Поэтому при дальнейшем изложении не будем акцентировать внимания на них, считая данную сетку высот  $z_i$ ,  $i=1, \dots, N$  уже внутренней (возможно, совпадающей с внешней).

Забегая вперед, отметим, что проблема перехода к внутренней вертикальной сетке возникает и в задачах расчета поля рассеянного излучения. Там в качестве критерия обычно задают максимально допустимую оптическую толщину слоя, т.е. сразу  $\Delta\tau_{\max}$ , или же аналогичную величину, но только для рассеяния (стандартно  $0.05 \div 0.01$ ).

#### 1.4. Расчет потоков монохроматического теплового излучения. Учет влияния поверхности

##### Расчет нисходящего потока теплового излучения

В предыдущем разделе мы подробно рассмотрели формулы и алгоритмы расчета интенсивности теплового излучения из верхней полусферы. Отдельной задачей, как отмечалось в разделе 1.1, является расчет полусферических потоков. Рассмотрим нисходящий полусферический поток монохроматического теплового излучения – первая формула из (1.1.13). Подставим в нее выражение для интенсивности (1.3.8), поменяем местами интегрирование по высоте и зенитному углу, а также введем подстановку  $\eta = \cos \vartheta$ . В результате, для

функций пропускания возникнут интегралы вида  $\int_0^1 \eta \exp(-\tau/\eta) d\eta$ , которые выражаются через специальные функции – интегральные экспоненты

$$E_n(x) = \int_0^1 y^{n-2} \exp(-x/y) dy. \quad (1.4.1)$$

Окончательно получаем

$$F_{\lambda}^{\downarrow}(z) = I_{\lambda}(z_{\infty}) P_{\lambda}^F(z_{\infty}, z) - \int_z^{z_{\infty}} B_e(\lambda, T(z')) \frac{\partial P_{\lambda}^F(z', z)}{\partial z'} dz', \quad (1.4.2)$$

где

$$P_{\lambda}^F(z_1, z_2) = 2\pi E_3(\tau_{\lambda}(z_1, z_2)) \quad (1.4.3)$$

– функция пропускания для потока, обычно называемая диффузной функцией пропускания. Соотношения (1.4.2), (1.4.3) согласуются с аналогичными формулами, приведенными в [1,2], если учесть, что  $\frac{dE_3(x)}{dx} = -E_2(x)$ .

Из вида соотношения (1.4.2) вытекает, что для расчета нисходящих потоков теплового излучения, можно использовать те же самые алгоритмы, что для интенсивностей (см. раздел 1.3), просто формально заменив в них функцию пропускания  $P_{\lambda}(z_1, z_2, \vartheta)$  на диффузную  $P_{\lambda}^F(z_1, z_2)$ . О вычислении интегральных экспонент сведения приводятся в Приложении 4.

##### Тепловое излучение из нижней полусферы

Рассмотрим теперь задачу расчета интенсивности и потока теплового излучения в направлении от поверхности, из нижней полусферы. Их вычисление может быть проведено по описанным выше алгоритмам для



потоков и интенсивностей излучения сверху с применением рассмотренного в конце раздела 1.2 приема “переворот атмосферы”. Поэтому, чтобы не путать читателя, мы не будем приводить соответствующие аналитические формулы, аналогичные (1.3.8) и (1.4.2). Единственным отличием в случае излучения снизу будет появление вместо  $I_\lambda(z_\infty)$  величины  $I_\lambda(z_0)$ , т.е. интенсивности от поверхности на нижней границе атмосферы. Приступим к ее определению.

### Модели отражательных характеристик поверхности

На поверхности Земли (планеты) в рассматриваемом спектральном диапазоне теплового излучения (ИК, МКВ) происходят два процесса – отражение излучения, падающего на поверхность из атмосферы, и собственное тепловое излучение поверхности, следовательно

$$I_\lambda(z_0) = I_\lambda^{(r)}(z_0) + I_\lambda^{(t)}(z_0), \quad (1.4.4)$$

где  $I_\lambda^{(r)}(z_0)$  и  $I_\lambda^{(t)}(z_0)$  – интенсивности отраженного (reflection) и теплового (thermal) излучения, соответственно.

Для конкретного описания процесса отражения надо задать определенную модель отражательных свойств поверхности [1,2]. В рамках данной главы ограничимся двумя простейшими моделями: идеальной зеркальной и изотропной.

Идеальное зеркальное отражение. Для него действует закон “угол отражения равен углу падения”, следовательно,

$$I_\lambda^{(r)}(z_0, \vartheta) = r_\lambda(\vartheta) I_\lambda^\downarrow(z_0, \vartheta), \quad (1.4.5)$$

где  $I_\lambda^{(r)}(z_0, \vartheta)$  – интенсивность отраженного от поверхности излучения с надирным углом  $\vartheta$ ,  $I_\lambda^\downarrow(z_0, \vartheta)$  – интенсивность падающего на поверхность излучения с зенитным углом  $\vartheta$  (1.3.8),  $r(\vartheta)$  – коэффициент отражения, вычисляемый по формуле, являющейся следствием известных формул Френеля

$$r_\lambda(\vartheta) = \frac{1}{2} \left( \left| \frac{\tilde{m}_\lambda^2 \cos \vartheta - \sqrt{\tilde{m}_\lambda^2 - 1 + \cos^2 \vartheta}}{\tilde{m}_\lambda^2 \cos \vartheta + \sqrt{\tilde{m}_\lambda^2 - 1 + \cos^2 \vartheta}} \right|^2 + \left| \frac{\cos \vartheta - \sqrt{\tilde{m}_\lambda^2 - 1 + \cos^2 \vartheta}}{\cos \vartheta + \sqrt{\tilde{m}_\lambda^2 - 1 + \cos^2 \vartheta}} \right|^2 \right), \quad (1.4.6)$$

где  $\tilde{m}_\lambda$  – показатель преломления вещества поверхности (в общем случае – комплексный).

Изотропное отражение. В этом случае интенсивность отраженного излучения  $I_\lambda^{(r)}(z_0)$  одинакова во всех направлениях, что дает

$$I_\lambda^{(r)}(z_0) = \frac{1}{\pi} A_\lambda F_\lambda^\downarrow(z_0), \quad (1.4.7)$$

где  $F_\lambda^\downarrow(z_0)$  – приходящий на поверхность поток теплового излучения (1.4.2),  $A_\lambda$  – альbedo поверхности для данной длины волны.

### Модели излучательных свойств поверхности

Поскольку для монохроматического случая коэффициенты отражения и излучения в сумме дают единицу [1,2], модели теплового излучения поверхности нужно согласовать с моделями отражения.

Изотропное (равновесное) излучение. В этом случае интенсивность теплового излучения одинакова во всех направлениях и выражается соотношением

$$I_\lambda^{(t)}(z_0) = \varepsilon_\lambda B_e(\lambda, T_s), \quad (1.4.8)$$

где  $\varepsilon_\lambda$  – излучательная способность поверхности,  $B_e(\lambda, T_s)$  – функция Планка (раздел 1.3), в которой температура поверхности  $T_s$  в общем случае может не совпадать с температурой нижней границы атмосферы  $T(z_0)$ .

Для изотропного отражения имеем

$$\varepsilon_\lambda = 1 - A_\lambda. \quad (1.4.9)$$

Для идеального зеркального отражения альбедо в (1.4.9) следует найти переходом в законе отражения (1.4.5) от интенсивностей к полусферическим потокам, считая нисходящую интенсивность константой и учитывая (1.4.7), что дает

$$A_\lambda = 2 \int_0^{\pi/2} r_\lambda(\vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta. \quad (1.4.10)$$

Особенности вычисления интегралов вида (1.4.10) рассмотрим чуть ниже.

**Направленное излучение.** Можно рассматривать модели с зависимостью излучательной способности от направления [2]. Это уже соответствует случаю неравновесного теплового излучения

$$I_\lambda^{(\vartheta)}(z_0, \vartheta) = \varepsilon_\lambda(\vartheta) B_e(\lambda, T_s). \quad (1.4.11)$$

Для идеального зеркального отражения положим

$$\varepsilon_\lambda(\vartheta) = 1 - r_\lambda(\vartheta). \quad (1.4.12)$$

#### **Интенсивность теплового излучения в верхнюю полусферу**

Теперь алгоритм расчета интенсивности теплового излучения в верхнюю полусферу можно сформулировать совсем просто:

1) находим интенсивность (для зеркального отражения) или поток (для изотропного отражения) излучения из верхней полусферы на поверхности по (1.3.8) или (1.4.2);

2) для заданной модели отражения и излучения находим интенсивность уходящего с поверхности излучения;

3) находим искомую интенсивность по алгоритму интегрирования (1.3.8) для “перевернутой атмосферы” с учетом (1.4.4).

Заметим, что для стандартного случая излучения из нижней полусферы на верхней границе атмосферы ( $z = z_\infty$ ) для функций пропускания при “перевороте атмосферы” хотя и выполняется  $P_\lambda(z_\infty, z_0, \vartheta) = P_\lambda(z_0, z_\infty, \vartheta)$ , но интегрировать по высоте в алгоритме расчета интенсивности все равно необходимо, т.е. необходимы два прохода интегрирования – отдельно для излучения из верхней полусферы и отдельно – из нижней.

#### **Поток теплового излучения в верхнюю полусферу**

Для модели изотропного отражения и излучения поверхности интенсивность излучения в формуле (1.4.4) не зависит от угла  $\vartheta$  и поэтому может быть непосредственно использована в вычислениях по (1.4.2) с учетом “переворота атмосферы”.

Для моделей идеального зеркального отражения, где зависимость интенсивности в (1.4.4) от направления присутствует, не обойтись без интегрирования по надирному углу. Согласно формулам для потоков (1.1.13) имеем

$$F_\lambda^\uparrow(z) = 2\pi \int_0^{\pi/2} I_\lambda^\uparrow(z, \vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta, \quad (1.4.13)$$

где  $I_{\lambda}^{\uparrow}(z, \vartheta)$  – интенсивность излучения из нижней полусферы, вычисляемая по приведенному выше алгоритму (для соответствующего набора углов  $\vartheta$ , определяемых конкретной квадратурной формулой).

#### **Вычисление интегралов по надирному углу**

Рассмотрим особенности вычисления интегралов (1.4.10), (1.4.13) по надирному углу  $\vartheta$ . Подстановкой  $\eta = \cos \vartheta$ , они приводятся к виду

$$\int_0^{\pi/2} f(\vartheta) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \int_0^1 f(\eta) \eta d\eta, \quad (1.4.14)$$

где  $f(\vartheta)$  – некоторая функция. Далее для (1.4.14) используется либо знакомая нам формула трапеций с шагом по  $\eta$  от 0.1 и меньше (обычно в диапазоне  $0.1 \div 0.05$ , отметим, что при  $\eta = 0$  подынтегральная функция равна нулю), либо квадратурная формула Гаусса (см. Приложение 5). Последний вариант считается стандартным, поскольку для формулы Гаусса достаточно брать небольшое количество узлов интегрирования (обычно 5-10). Однако практический опыт показывает, что решающих преимуществ перед формулой трапеции выбор формулы Гаусса не дает.

## 2. Рассеяние излучения

### 2.1. Рассеяние излучения – основные понятия и соотношения

#### Рассеяние излучения в атмосфере

В предыдущей главе 1 мы поставили, как основную, задачу расчета монохроматической интенсивности излучения в атмосфере и рассмотрели ее решение для случаев отсутствия (пренебрежения) рассеянием. Случай учета рассеяния значительно более сложен. В сущности, основное содержание теории переноса излучения, как и всех остальных глав пособия, и составит его рассмотрение.

Начнем с кратких формулировок основных понятий и соотношений [1,2].

Рассеяние излучения есть изменение его направления относительно исходного при взаимодействии с атмосферой. Наглядным примером служит голубое дневное небо – рассеянное излучение солнца, приходящее в наш глаз с различных направлений. Физической причиной рассеяния является дифракция света при взаимодействии его с воздухом и атмосферными аэрозолями.

Рассеяние излучения характеризуется объемным коэффициентом рассеяния среды (атмосферы)  $\sigma$ : чем он больше, тем рассеяние сильнее. Общее ослабление излучения определяется суммой процессов рассеяния и поглощения. С учетом закона сохранения энергии отсюда вытекает соотношение

$$\alpha = \sigma + k, \quad (2.1.1)$$

где  $\alpha$  – объемный коэффициент ослабления,  $k$  – объемный коэффициент поглощения. Соотношение (2.1.1) позволяет рассматривать отдельные оптические толщины ослабления, поглощения и рассеяния и вычислять их по алгоритмам раздела 1.2.

Изменение направления излучения при рассеянии характеризуется углом рассеяния  $\gamma$ . По определению угол рассеяния является углом между направлениями исходного и рассеянного излучения (от 0 до  $\pi$ ). Второй координатой является азимут рассеяния  $\phi$ , отсчитываемый в плоскости, перпендикулярной исходному направлению. Характеристикой “относительной силы рассеяния” в конкретном направлении (по сравнению с другими) является индикатриса рассеяния  $x(\gamma, \phi)$ . К индикатрисе предъявляется требование нормировки: интеграл от нее по всей сфере должен быть равен  $4\pi$ . Как правило, ограничиваются рассмотрением индикатрис, которые не зависят от азимута рассеяния (т.е. одинаковы для любых  $\phi$  при фиксированном угле рассеяния  $\gamma$ ). Это характерно для изотропных сред, т.е. таких, свойства которых не зависят от направления. В данном пособии будут рассматриваться только такие индикатрисы  $x(\gamma)$ . Для них условие нормировки приобретает вид

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi x(\gamma) \sin \gamma d\gamma = 1. \quad (2.1.2)$$

Из вида (2.1.2) следует, что индикатриса рассеяния  $x(\gamma)$  имеет смысл плотности вероятности, т.е. величина  $x(\gamma) \sin \gamma d\gamma$  равна вероятности того, что фотон, выживший в акте взаимодействия с веществом среды, приобретет новое направление, угол между которым и направлением распространения фотона до акта рассеяния равен  $\gamma$ .

### Уравнение переноса рассеянного излучения

Явление рассеяния приводит к тому, что в дифференциальном уравнении переноса излучения (1.2.1) объемный коэффициент излучения нельзя принимать равным нулю, даже если в среде отсутствует собственное излучение. Теперь роль дополнительных источников в каждой точке играет рассеянное излучение. Это приводит (1.2.1) к форме

$$\frac{dI}{dl} = -\alpha I + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{4\pi} x(\omega) I(\omega) d^2\omega, \quad (2.1.3)$$

где второе слагаемое описывает дополнительный вклад в направлении  $l$  интенсивности рассеянного излучения со всех других направлений  $\omega$ .

### Уравнение переноса рассеянного солнечного излучения в плоскопараллельной атмосфере

Начнем с классической задачи о рассеянии солнечного излучения в плоскопараллельной атмосфере. В этом случае искомая интенсивность (на входе прибора) зависит от высоты  $z$ , зенитного угла  $\mathcal{G}$  и азимута  $\varphi$ , т.е. есть  $I(z, \mathcal{G}, \varphi)$ . В отличие от предыдущей главы, зенитный угол теперь отсчитывается в полном диапазоне (от 0 до  $\pi/2$  для излучения из верхней полусферы, от  $\pi/2$  до  $\pi$  для излучения из нижней полусферы). Азимут отсчитывается в плоскости, параллельной границам атмосферы, от произвольного направления. Для плоскопараллельной геометрии уравнение (2.1.3) принимает вид

$$\cos \mathcal{G} \frac{dI(z, \mathcal{G}, \varphi)}{dz} = -\alpha(z) I(z, \mathcal{G}, \varphi) + \frac{\sigma(z)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi x(z, \beta) I(z, \mathcal{G}', \varphi') \sin \mathcal{G}' d\mathcal{G}', \quad (2.1.4)$$

где угол рассеяния  $\beta$  есть угол между направлениями  $(\mathcal{G}', \varphi')$  и  $(\mathcal{G}, \varphi)$ :

$$\cos \beta = \cos \mathcal{G} \cos \mathcal{G}' + \sin \mathcal{G} \sin \mathcal{G}' \cos(\varphi - \varphi'). \quad (2.1.5)$$

Вывод формулы (2.1.5) приводится, например, в [2].

### Оптическая глубина как вертикальная координата

Разделив обе части уравнения (2.1.4) на  $\alpha(z)$ , получим в левой части дифференцирование по  $\alpha(z) dz$ . Согласно определению оптической толщины (1.2.7):  $d\tau(z_\infty, z) = -\alpha(z) dz$ . Из (1.2.7) в силу положительности значения  $\alpha(z)$  следует, что  $\tau(z_\infty, z)$  с уменьшением высоты  $z$  является монотонно возрастающей функцией. Но это дает возможность использовать ее как вертикальную координату в задачах переноса излучения: при изменении  $z$  от  $z_\infty$  до  $z_0$  значение  $\tau(z_\infty, z)$  меняется от 0 до  $\tau_0 \equiv \tau(z_\infty, z_0)$ . В качестве вертикальной координаты,  $\tau(z_\infty, z)$  называется оптической глубиной в атмосфере. Она равна нулю на верхней границе и  $\tau_0$  на нижней. Величина  $\tau_0$  называется оптической толщиной атмосферы.

На практике, вспоминая о дискретном задании профилей атмосферных параметров (раздел 1.2), переход от высоты к оптической глубине осуществить совсем просто. Достаточно для сетки высот  $z_i$ ,  $i=1, \dots, N$  рассчитать, пользуясь алгоритмами раздела 1.2, сетку оптических глубин  $\tau_i = \tau(z_\infty, z_i)$ . Для произвольной высоты  $z$ , возможно, не совпадающей с сеткой, алгоритмы расчета оптической глубины также имеются в разделе 1.2. Таким образом, мы получаем две согласованные сетки высотных координат  $z_i$  и  $\tau_i$ ,  $i=1, \dots, N$  по

которым элементарно осуществляется переход от одной к другой для заданных профилей атмосферных параметров (таблиц типа  $y_i(z_i)$ ).

Перейдем в уравнении (1.2.4) от высоты к оптической глубине. В правой части возникнет величина

$$\Lambda(\tau) = \frac{\sigma(\tau)}{\alpha(\tau)} = \frac{\sigma(\tau)}{\sigma(\tau) + k(\tau)}. \quad (2.1.6)$$

Она меняется от 0 до 1 и называется альбедо однократного рассеяния. Название по аналогии с альбедо поверхности  $A$ : там  $A=0$  – нет отражения,  $A=1$  – полное отражение; здесь  $\Lambda=0$  – нет рассеяния ( $\sigma=0$  и имеет место только истинное поглощение излучения),  $\Lambda=1$  – полное рассеяние ( $k=0$  и нет поглощения). Второе название этой величины, которое нам еще понадобится, – вероятность выживания фотона в акте рассеяния: если считать поглощение света его гибелью (т.е. энергия из электромагнитной формы переходит в другую форму), то  $\Lambda$  показывает вероятность фотону рассеяться, т.е. энергия остается в электромагнитной форме.

Перейдем в уравнении (2.1.4) от зенитных углов к их косинусам подстановками  $\eta = \cos \vartheta$ ,  $\eta' = \cos \vartheta'$ ,  $\chi = \cos \beta$ . После всех указанных преобразований получаем

$$\eta \frac{dI(\tau, \eta, \varphi)}{d\tau} = -I(\tau, \eta, \varphi) + \frac{\Lambda(\tau)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 x(\tau, \chi) I(\tau, \eta', \varphi') d\eta',$$

$$\chi = \eta\eta' + \sqrt{(1-\eta^2)(1-\eta'^2)} \cos(\varphi - \varphi'). \quad (2.1.7)$$

#### Граничные условия

Собственно уравнения (2.1.7) для определения искомой интенсивности еще недостаточно, т.е. к нему нужны граничные условия.

На верхнюю границу атмосферы падает излучение Солнца. Обозначим его зенитный угол как  $\vartheta_0$ , соответственно  $\eta_0 = \cos \vartheta_0$ , а азимут – как  $\varphi_0$ . Поскольку направление отсчета азимута выбирается произвольно, в теории переноса излучения стандартно отсчитывают азимут от азимута Солнца, то есть полагают  $\varphi_0 = 0$ . В зависимости от удобства конкретных формул и алгоритмов может использоваться как общее обозначение  $\varphi_0$ , так и его конкретная подстановка (нуль).

Поток солнечного излучения на верхней границе атмосферы на перпендикулярную лучам площадку обозначим  $F_0$ . В классической теории переноса для него принято обозначение  $\pi S$ . Аналогично исходя из соображений удобства, будем использовать оба обозначения с учетом  $F_0 \equiv \pi S$ .

Для учета в (2.1.7) излучения на верхней границе атмосферы все излучение разбивается на прямое (т.е. не испытавшее ни одного рассеяния по пути от верхней границы до данной точки) и рассеянное (диффузное) излучение. Для прямого излучения левая часть и первое слагаемое правой сокращаются с учетом закона Бугера. Во втором слагаемом интеграл по всем направлениям исчезает, т.к. прямое излучение имеет только одно направление  $(\vartheta_0, \varphi_0)$ . В результате (2.1.7) переходит в следующее уравнение для рассеянного (без прямого!) солнечного излучения

$$\eta \frac{dI(\tau, \eta, \varphi)}{d\tau} = -I(\tau, \eta, \varphi) + \frac{\Lambda(\tau)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 x(\tau, \chi) I(\tau, \eta', \varphi') d\eta' +$$

$$+ \frac{\Lambda(\tau)S}{4} x(\tau, \chi_0) \exp(-\tau/\eta_0),$$

где

$$\begin{aligned} \chi &= \eta\eta' + \sqrt{(1-\eta^2)(1-\eta'^2)} \cos(\varphi - \varphi'), \\ \chi_0 &= \eta\eta_0 + \sqrt{(1-\eta^2)(1-\eta_0^2)} \cos(\varphi - \varphi_0). \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

На нижней границе атмосферы имеется поверхность, которая может отражать солнечное излучение. Однако, как будет показано ниже, в теории переноса разработаны методы, позволяющие учитывать отражение отдельно, после решения задачи для атмосферы без учета отражающей поверхности. Таким образом, соотношение (2.1.8) рассматривается как уравнение переноса только для рассеянного солнечного излучения, т.е. без прямого и отраженного излучения. Согласно этому обстоятельству, никакое излучение уже не приходит на атмосферу извне, что дает граничные условия

$$\begin{aligned} I(0, \eta, \varphi) &= 0, \text{ если } \eta > 0, \\ I(\tau_0, \eta, \varphi) &= 0, \text{ если } \eta < 0. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Напомним, что все величины в (2.1.8) являются монохроматическими, т.е. определены для конкретной длины волны.

#### **Функция источников**

Перепишем формально (2.1.8) в виде

$$\eta \frac{dI(\tau, \eta, \varphi)}{d\tau} = -I(\tau, \eta, \varphi) + B(\tau, \eta, \varphi), \quad (2.1.10)$$

$$B(\tau, \eta, \varphi) = \frac{\Lambda(\tau)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 x(\tau, \chi) I(\tau, \eta', \varphi') d\eta' + \frac{\Lambda(\tau)S}{4} x(\tau, \chi_0) \exp(-\tau/\eta_0). \quad (2.1.11)$$

Функция  $B(\tau, \eta, \varphi)$  называется функцией источников излучения (или кратко – функция источников). Она имеет простой физический смысл: величина  $B(\tau, \eta, \varphi)$  равна энергии, которую излучает объем вещества среды с площадью основания  $1 \text{ см}^2$  и высотой, равной единице оптической высоты, в единичном телесном угле в единицу времени в расчете на единичный интервал длины волны. Второе ее слагаемое – это вклад в рассеяние прямого солнечного излучения, т.е. рассеяние один раз – однократное рассеяние. Первое слагаемое, где уже стоит интенсивность рассеянного излучения, описывает вклад последующих, не первых рассеяний, т.е. многократное рассеяние.

#### **Выражение интенсивности через функцию источников**

Соотношение (2.1.10) можно формально рассматривать как дифференциальное уравнение относительно  $I(\tau, \eta, \varphi)$ . Но тогда это линейное дифференциальное уравнение, общее решение которого известно. Для (2.1.10) с учетом граничных условий (2.1.9) получаем

$$I(\tau, \eta, \varphi) = \left| \frac{1}{\eta} \int_{\tau}^0 B(\tau', \eta, \varphi) \exp\left(-\left|\frac{\tau - \tau'}{\eta}\right|\right) d\tau' \right|, \text{ если } \eta > 0, \quad (2.1.12)$$

и

$$I(\tau, \eta, \varphi) = \left| \frac{1}{\eta} \int_{\tau}^{\tau_0} B(\tau', \eta, \varphi) \exp\left(-\left|\frac{\tau - \tau'}{\eta}\right|\right) d\tau' \right|, \text{ если } \eta < 0. \quad (2.1.13)$$

Пределы интегрирования в первой из формул (2.1.13) специально перевернуты по сравнению с ее классической записью [1,2] для удобства практических вычислений, что будет ясно чуть ниже. По той же причине использованы модули.

Соотношения (2.1.13), конечно, не решают задачу расчета интенсивности рассеянного излучения, поскольку функция источников, согласно (2.1.11), сама от нее зависит. Однако они позволяют формально выразить искомую интенсивность через функцию источников, сводя задачу к расчету последней. Это обстоятельство, как мы покажем чуть ниже, удобно в теоретическом плане, а как покажем прямо сейчас – и для практических вычислений.

Действительно, для численного интегрирования по (2.1.13) достаточно найти функцию  $B(\tau, \eta, \varphi)$  на узлах вертикальной сетки, то есть как  $B_i(\tau_i, \eta, \varphi)$ ,  $i=1, \dots, N$ . Но тогда для вычисления первого из интегралов (2.1.13) достаточно просто применить формулу трапеций вида (1.2.12)! Всего лишь формально заменив в ней  $z_j$  на  $\tau_j$ , а  $\alpha_j(z_j)$  на подынтегральную функцию

$B(\tau_j, \eta, \varphi) \exp\left(-\left|\frac{\tau - \tau_j}{\eta}\right|\right)$ . А для второй формулы использовать прием

“переворота атмосферы” (см. раздел 1.2).

Таким образом, в плане практическом, мы свели задачу расчета интенсивности по (2.1.11) к ранее решенной, с готовым алгоритмом. Следовательно, одним из возможных путей решения нашей задачи теперь становится нахождение функции источников  $B(\tau, \eta, \varphi)$ .

#### **Приближение однократного рассеяния для солнечного излучения**

В ряде задач можно пренебречь первым слагаемым в выражении для функции источников (2.1.11) по сравнению со вторым. Тогда соотношения (2.1.13) уже явно решают задачу расчета интенсивности рассеянного излучения, поскольку теперь

$$B(\tau, \eta, \varphi) = \frac{\Lambda(\tau)S}{4} x(\tau, \chi_0) \exp(-\tau/\eta_0). \quad (2.1.14)$$

Это решение известно как приближение однократного рассеяния. Оно обычно применяется при достаточно слабом рассеянии, а также при существенном поглощении (когда  $\Lambda(\tau)$  мало), например, в ближней ИК области.

Для практических вычислений в приближении однократного рассеяния (2.1.14) по (2.1.13) должны быть заданы характеристики солнечного излучения  $S$ ,  $\eta_0$ ,  $\varphi_0$ , а также таблицы атмосферных параметров  $\sigma_i(z_i)$ ,  $k_i(z_i)$ ,  $x(z_i, \chi_0)$ ,  $i=1, \dots, N$ .

#### **Рассеяние теплового излучения**

Отметим, что для солнечного излучения функция источников однократного рассеяния (2.1.14) играет роль первичного излучения, которое потом рассеивается еще, что отражает первое слагаемое в общем выражении (2.1.11). Но для теплового излучения роль первичных источников, очевидно, играют собственно излучения каждой точки атмосферы. То есть второе слагаемое в (2.1.11) определяется законом Кирхгофа (1.3.4). С учетом сделанных преобразований координат это дает следующее выражение для функции источников рассеянного теплового излучения



$$B(\tau, \eta, \varphi) = \frac{\Lambda(\tau)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 x(\tau, \chi) I(\tau, \eta', \varphi') d\eta' + (1 - \Lambda(\tau)) B_e(\lambda, T(\tau)). \quad (2.1.15)$$

Можно, конечно, рассматривать и случай наличия одновременно как солнечного, так и теплового излучения. Тогда к (2.1.15) надо добавить еще слагаемое (2.1.14). Однако для практических вычислений все же рекомендуется считать интенсивности солнечного и теплового излучения отдельно (и может быть даже разными методами), а затем общую интенсивность находить как их сумму. Такая возможность вытекает из линейности уравнения переноса излучения (2.1.10).

Отметим, что подстановка только второго слагаемого из (2.1.15) в (2.1.10) не приведет к новому результату – мы получим соотношения вида (1.3.7) (предлагаем убедиться в этом в качестве упражнения). С другой стороны, в рамках (1.3.7) и его практического вида (1.3.8) имеется возможность приближенного учета рассеяния, как только ослабления излучения, путем замены объемного коэффициента поглощения на объемный коэффициент ослабления (2.1.1). В результате для (1.3.8) получим

$$I_\lambda(z, \mathcal{G}) = I_\lambda(z_\infty) P_\lambda^{(\sigma)}(z_\infty, z, \mathcal{G}) P_\lambda^{(k)}(z_\infty, z, \mathcal{G}) - \int_z^{z_\infty} B_e(\lambda, T(z')) P_\lambda^{(\sigma)}(z', z, \mathcal{G}) \frac{\partial P_\lambda^{(k)}(z', z, \mathcal{G})}{\partial z'} dz', \quad (2.1.16)$$

где  $P_\lambda^{(k)}(z', z, \mathcal{G})$  и  $P_\lambda^{(\sigma)}(z', z, \mathcal{G})$  – отдельные функции пропускания по поглощению (оптическая толщина вычисляется через  $k(z)$ ) и по рассеянию (оптическая толщина вычисляется через  $\sigma(z)$ ). Для практических расчетов по (2.1.16) достаточно провести элементарную модификацию алгоритмов из разделов 1.3 и 1.4, вычисляя две оптические толщины (по поглощению и рассеянию). Заметим, что интегрирование в (2.1.16) по-прежнему ведется по функции пропускания по поглощению, а функция пропускания по рассеянию выступает лишь как дополнительный множитель при функции  $B_e(\lambda, T(z'))$ .

### Формальное решение уравнения переноса рассеянного излучения

Вернемся к рассмотрению общего случая рассеяния солнечного излучения с функцией источников (2.1.11). Можно подставить выражения для интенсивности (2.1.13) в функцию источников (2.1.11). В результате получается интегральное уравнение для функции источников (его вид приведен, например, в [1,2]). Анализ этого уравнения позволяет записать его решение в виде формального ряда, а также проанализировать ряд важных свойств поля рассеянного излучения. Однако указанное решение является формальным в смысле сложности его практического использования из-за слишком большого объема вычислений. Кроме того, на указанном решении основан лишь один численный метод, поэтому имеет смысл приводить его также в соответствующем разделе пособия.

Таким образом, констатируя существование формального решения задачи, не будем останавливаться на нем здесь, в общей части описания численных методов, отсылая читателя за подробностями к работам [1,2].

## 2.2. Азимутальные гармоники

### Разложение индикатрисы рассеяния в ряд по полиномам Лежандра

Стандартным математическим приемом является поиск решения дифференциальных и интегральных уравнений в виде разложения в ряд по системе ортогональных функций. Для уравнения переноса рассеянного излучения (2.1.18) определенного успеха можно добиться используя разложение индикатрисы рассеяния в ряд по полиномам Лежандра.

Полиномы Лежандра  $P_n(x)$  определяются соотношением

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (1-x^2)^n}{dx^n}, \quad (2.2.1)$$

в частности:  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$ . Для практических расчетов полиномов Лежандра используется рекуррентное соотношение – см. все вычислительные подробности в Приложении 6. Полиномы Лежандра образуют на интервале  $[-1,1]$  ортогональную систему функций:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad \text{если } n \neq m; \quad \int_{-1}^1 (P_n(x))^2 dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (2.2.2)$$

Поэтому любая непрерывная на интервале  $[-1,1]$  функция может быть разложена в ряд по полиномам Лежандра.

Применяя разложение для индикатрисы рассеяния с косинусом угла рассеяния в качестве аргумента, получаем

$$x(\chi) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j P_j(\chi), \quad (2.2.3)$$

где коэффициенты в разложении имеют вид

$$x_j = \frac{2j+1}{2} \int_{-1}^1 x(\chi) P_j(\chi) d\chi. \quad (2.2.4)$$

Отметим, что, во-первых, мы учитываем высотную зависимость индикатрисы  $x(\tau, \chi)$ . Следовательно, коэффициенты  $x_j$  в общем случае зависят от оптической глубины  $\tau$ . Во вторых, при практических вычислениях ряд (2.2.3) следует брать конечным. Поэтому сразу зададим некоторое предельное значение числа его членов  $M$ . Вопросы выбора значения  $M$  и вообще все прикладные вычислительные вопросы отложим до конца раздела, а сейчас рассмотрим теоретические преобразования уравнения переноса излучения.

Для аргумента индикатрисы – косинуса угла между направлениями вида (2.1.7) известно соотношение

$$P_j(\eta\eta' + \sqrt{(1-\eta^2)(1-\eta'^2)} \cos(\varphi - \varphi')) = P_j(\eta)P_j(\eta') + 2 \sum_{m=1}^j \frac{(j-m)!}{(j+m)!} P_j^m(\eta)P_j^m(\eta') \cos m(\varphi - \varphi'), \quad (2.2.5)$$

где  $P_j^m(x)$  – это присоединенные функции Лежандра, определяемые через производные от полиномов Лежандра (в [1,2] – опечатка)

$$P_j^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_j(x)}{dx^m}. \quad (2.2.6)$$

Подчеркнем, что здесь и далее при разложении по азимутальным гармоникам в обозначениях используются верхние индексы, это не степени! Это традиционно

принятый вид, идущий от обозначений  $P_j^m(x)$ , крайне неудачный с прикладной точки зрения, которому, однако, приходится следовать. Практические аспекты вычислений присоединенных функций Лежандра изложены в Приложении 6. Заметим, что, согласно (2.2.6)  $P_j^0(x) = P_j(x)$ , т.е. полиномы Лежандра формально можно рассматривать как частный случай присоединенных функций Лежандра.

Применяя соотношение (2.2.5) к ряду для индикатрисы рассеяния (2.2.3) после несложных выкладок, подробно изложенных в [1,2], получаем

$$x(\chi) = p^0(\eta, \eta') + 2 \sum_{m=1}^M p^m(\eta, \eta') \cos m(\varphi - \varphi'), \quad (2.2.7)$$

где

$$p^m(\eta, \eta') = \sum_{j=m}^M x_j \frac{(j-m)!}{(j+m)!} P_j^m(\eta) P_j^m(\eta'). \quad (2.2.8)$$

### Разложение по азимутальным гармоникам

Запишем формально для интенсивности рассеянного излучения и функции источников соотношения, аналогичные ряду для индикатрисы (2.2.7).

$$\begin{aligned} I(\tau, \eta, \varphi) &= I^0(\tau, \eta) + 2 \sum_{m=1}^M I^m(\tau, \eta) \cos m\varphi, \\ B(\tau, \eta, \varphi) &= B^0(\tau, \eta) + 2 \sum_{m=1}^M B^m(\tau, \eta) \cos m\varphi. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Соотношения (2.2.9) и есть разложения по азимутальным гармоникам, а собственно азимутальные гармоники – функции  $I^m(\tau, \eta)$  и  $B^m(\tau, \eta)$ .

Теперь подставим ряды (2.2.7) и (2.2.9) в соотношения предыдущего раздела 2.1, вычислим аналитически интегралы по азимуту и приравняем члены с одинаковыми индексами  $m$  [1,2]. Приведем полный список получающихся выражений, поскольку именно на них будут основываться излагаемые в последующих разделах численные методы.

Уравнение переноса рассеянного солнечного излучения (2.1.8)

$$\begin{aligned} \eta \frac{dI^m(\tau, \eta)}{d\tau} &= -I^m(\tau, \eta) + \frac{\Lambda(\tau)}{2} \int_{-1}^1 p^m(\tau, \eta, \eta') I^m(\tau, \eta') d\eta' + \\ &+ \frac{\Lambda(\tau)}{4} S p^m(\tau, \eta, \eta_0) \exp(-\tau/\eta_0) \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} I^m(0, \eta) &= 0, \text{ если } \eta > 0, \\ I^m(\tau_0, \eta) &= 0, \text{ если } \eta < 0. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Здесь и далее мы будем явно учитывать отмеченную выше зависимость коэффициентов разложения индикатрисы  $x_j$  и функций  $p^m(\eta, \eta')$  от оптической глубины.

Используя функцию источников рассеянного солнечного излучения, формулы (2.1.10) и (2.1.11) приобретают для каждой азимутальной гармоники

$$\begin{aligned} \eta \frac{dI^m(\tau, \eta)}{d\tau} &= -I^m(\tau, \eta) + B^m(\tau, \eta), \\ B^m(\tau, \eta) &= \frac{\Lambda(\tau)}{2} \int_{-1}^1 p^m(\tau, \eta, \eta') I^m(\tau, \eta') d\eta' + \frac{\Lambda(\tau)}{4} S p^m(\tau, \eta, \eta_0) \exp(-\tau/\eta_0), \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

(2.2.13)

а выражение интенсивности через функцию источников (2.1.13):

$$I^m(\tau, \eta) = \left| \frac{1}{\eta} \int_{\tau}^0 B^m(\tau', \eta) \exp\left(-\left|\frac{\tau - \tau'}{\eta}\right|\right) d\tau' \right|, \text{ если } \eta > 0,$$

$$I^m(\tau, \eta) = \left| \frac{1}{\eta} \int_{\tau}^{\tau_0} B^m(\tau', \eta) \exp\left(-\left|\frac{\tau - \tau'}{\eta}\right|\right) d\tau' \right|, \text{ если } \eta < 0. \quad (2.2.14)$$

В частности функция источников для рассеянного теплового излучения (2.1.15) имеет вид

$$B^0(\tau, \eta) = \frac{\Lambda(\tau)}{2} \int_{-1}^1 p^0(\tau, \eta, \eta') I^0(\tau, \eta') d\eta' + (1 - \Lambda(\tau)) B_e(\lambda, T(\tau)),$$

$$B^m(\tau, \eta) = \frac{\Lambda(\tau)}{2} \int_{-1}^1 p^m(\tau, \eta, \eta') I^m(\tau, \eta') d\eta', \text{ если } m > 0. \quad (2.2.15)$$

Таким образом, перейдя от исходных переменных к азимутальным гармоникам, мы увеличили в задаче число неизвестных функций (сейчас оно равно  $M$ ), но зато убрали из них зависимость от азимута. В плане практическом это сокращает объем вычислений примерно на порядок.

#### **Приемы нахождения коэффициентов в разложении индикатрисы рассеяния**

Закончив выражениями (2.2.7) – (2.2.15) теоретическую часть, займемся теперь практическими, вычислительными аспектами разложения по азимутальным гармоникам.

Легко заметить, сравнивая формулы (2.2.10) – (2.2.15) с аналогичными выражениями раздела 2.1, что роль индикатрисы теперь играет функция  $p^m(\tau, \eta, \eta')$ . Таким образом, возникает задача перехода к ней от заданной индикатрисы рассеяния при использовании азимутальных гармоник. В выражении (2.2.8), определяющим  $p^m(\tau, \eta, \eta')$ , вычисление присоединенных функций Лежандра  $P_j^m(\eta)$  не представляет проблем, т.к. для них существуют рекуррентные формулы (см. Приложение 6), с учетом чего соответствующую вычислительную процедуру удобно делать сразу для двух аргументов ( $\eta$  и  $\eta'$ ).

Отметим соотношения симметрии

$$p^m(\tau, \eta, \eta') = p^m(\tau, \eta', \eta),$$

$$p^m(\tau, -\eta, -\eta') = p^m(\tau, \eta, \eta'),$$

$$p^m(\tau, -\eta, \eta') = p^m(\tau, -\eta', \eta). \quad (2.2.16)$$

Первое из соотношений (2.2.16) непосредственно следует из вида формулы (2.2.8). Для доказательства второго соотношения достаточно заметить, что полиномы Лежандра имеют либо только четные, либо только нечетные степени (см. Приложение 6), поэтому  $P_j(-\eta)P_j(-\eta') = P_j(\eta)P_j(\eta')$ . В свою очередь, присоединенные функции Лежандра согласно их определению (2.2.6) являются произведением всегда положительного множителя на производные от полиномов Лежандра и поэтому тоже будут иметь либо только четные, либо только нечетные степени, следовательно  $P_j^m(-\eta)P_j^m(-\eta') = P_j^m(\eta)P_j^m(\eta')$ . Из этого рассуждения следует третье соотношение (произведение полиномов четных степеней при разных знаках аргумента всегда положительно, произведение нечетных – всегда отрицательно). Использование (2.2.16)

позволяет сократить объем вычислений для заданного набора переменных в несколько раз.

Главной при использовании азимутальных гармоник является задача расчета коэффициентов разложения индикатрисы в ряд по полиномам Лежандра  $x_j(\tau)$ . Вычисление  $x_j(\tau)$  по формуле (2.2.4) зависит от способа задания индикатрисы как функции угла рассеяния. Рассмотрим возможные варианты.

Релеевская индикатриса. Это индикатриса рассеяния на объектах, малых по сравнению с длиной волны света [1,2], в частности, индикатриса молекулярного рассеяния. Для релеевской индикатрисы теория дает явное выражение

$$x(\gamma) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \gamma). \quad (2.2.17)$$

Подстановка (2.2.17) в (2.2.4) дает  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1/2$ . Для молекулярного рассеяния в выражение (2.2.17) вводят уточняющие множители [2]

$$x(\gamma) = \frac{3}{4 + 2\delta}(1 + \delta + (1 - \delta)\cos^2 \gamma), \quad (2.2.18)$$

где  $\delta$  – фактор деполяризации воздуха (по современным данным [7] для атмосферы Земли  $\delta = 0.0279$ ). Для (2.2.18) имеем  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{2(1 - \delta)}{4 + 2\delta}$ .

Таким образом, для релеевской индикатрисы в разложении остаются только две азимутальные гармоники – нулевая и вторая. Это позволяет написать явные выражения для функции  $p^m(\eta, \eta')$ :

$$p^0(\eta, \eta') = 1 + \frac{x_2}{4}(3\eta^2 - 1)(3\eta'^2 - 1), \quad p^2(\eta, \eta') = 9x_2(1 - \eta^2)(1 - \eta'^2). \quad (2.2.19)$$

Функция Хеньи-Гринштейна. Основным свойством индикатрис рассеяния света на объектах, уже не малых по сравнению с длиной волны, является вытянутость индикатрис вперед [1,2]. Таковы, например, индикатрисы рассеяния коротковолнового (в частности, видимого) излучения на атмосферных аэрозолях. Одним из приемов учета вытянутости вперед является аппроксимация аэрозольных индикатрис явными аналитическими выражениями. Здесь определенным стандартом является функция Хеньи-Гринштейна

$$x(\gamma) = \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \gamma)^{3/2}}, \quad (2.2.20)$$

параметр  $g$  которой имеет смысл среднего косинуса угла рассеяния  $0 \leq g < 1$  и определяет вытянутость индикатрисы. Заметим, что в общем случае средний косинус зависит от оптической глубины в атмосфере, т.е. зависимость  $x(\tau, \gamma)$  определяется заданной зависимостью  $g(\tau)$ .

Для функции Хеньи-Гринштейна (2.2.20) имеем простое соотношение для коэффициентов разложения по полиномам Лежандра  $x_j(\tau) = (2j + 1)g^j(\tau)$  (здесь в  $g^j(\tau)$  – степень).

Именно простота разложения по полиномам Лежандра и определила широкую популярность и общеизвестность аппроксимации Хеньи-Гринштейна (2.2.20). Заметим, что предложены и иные аналитические аппроксимации индикатрис, но они почти не используются на практике, уступая классической функции (2.2.20).

Табличное задание индикатрис. Аналитические аппроксимации индикатрис, в частности функция (2.2.20), не слишком точно передают форму реальных индикатрис, рассчитанных для модельных ансамблей аэрозольных частиц. Поэтому следующим, более точным способом задания индикатрис рассеяния является табличный: для определенного набора углов рассеяния (или их косинусов) приводятся вычисленные по аэрозольным моделям значения индикатрис, которые в общем случае различны для разных оптических глубин.

При табличном задании коэффициенты разложения индикатрисы по полиномам Лежандра, очевидно, следует находить численным интегрированием по формуле (2.2.4). Здесь можно учесть то обстоятельство, что квадратурная формула аппроксимирует индикатрису некоторым полиномом, который, согласно (2.2.4) умножается на полином Лежандра. Но произведение полиномов тоже является полиномом. Следовательно, интеграл между двумя точками таблицы может быть вычислен аналитически. Соответствующий алгоритм приведен в работе [8].

Непосредственное вычисление коэффициентов разложения. Для аэрозольных частиц сферической формы имеется возможность непосредственного вычисления коэффициентов разложения по полиномам Лежандра в рамках расчетов их оптических свойств. Этот способ задания коэффициентов разложения является самым точным. Соответствующие вычислительные формулы и алгоритмы приведены в работах [9,10].

Подводя итог приведенному обзору задания индикатрис рассеяния, констатируем, что в любом случае для них может быть получен набор коэффициентов разложения по полиномам Лежандра и функций  $p^m(\tau, \eta, \eta')$ . Поэтому в дальнейшем при использовании азимутальных гармоник, договоримся считать исходно заданными сами функции  $p^m(\tau, \eta, \eta')$ .

### **Вычислительные погрешности разложения по азимутальным гармоникам**

Последний практический вопрос, который осталось обсудить, это вопрос о выборе числа азимутальных гармоник  $M$ .

Поскольку  $M$  – число неизвестных задачи, то естественно стремиться его минимизировать. Но, с другой стороны, чем больше  $M$ , тем точнее аппроксимация индикатрисы рядом полиномов Лежандра (2.2.3). Это легко понять на примере функции Хеньи-Гринштейна (2.2.20). Для достаточно вытянутых модельных индикатрис (крупные частицы и малые длины волн) средний косинус рассеяния  $g$  достигает 0.7 – 0.8. Возьмем значение  $g = 0.75$ , зададим минимальное значение коэффициента разложения, например, 0.001. Тогда, как легко подсчитать, нам потребуется целых 40 членов ряда (2.2.3). При этом, значения коэффициентов убывают медленно, в качестве упражнения сравните точные значения индикатрисы Хеньи-Гринштейна (2.2.20) со значениями ряда (2.2.3) с пятью, десятью и т.д. членами. И это для простой аналитической аппроксимации! Для реальных же индикатрис, имеющих особенности типа максимума обратного рассеяния [2], как показано в ряде работ, требуются сотни членов разложения.

В реальности же ограничиваются значениями  $M$  порядка десятка, в крайнем случае – нескольких десятков. И тут дело не только в стремлении повысить скорость вычислений, что особенно важно для предназначенных для массовых расчетов специальных радиационных кодов [2]. С ростом числа  $M$  возникает новая проблема: полиномы, присоединенные функции Лежандра и

даже фигурирующие в разложении косинусы  $\cos m(\varphi - \varphi')$  становятся сильно осциллирующими функциями. Аналогичные свойства приобретают и искомые азимутальные гармоники функций источников и интенсивностей. Чтобы их представлять адекватно (т.е. без потерь на осцилляциях), требуется очень подробная сетка по переменным. Например, при  $m = 40$  для  $\cos m(\varphi - \varphi')$  нужен шаг по азимуту менее градуса! Эти требования делают крайне затруднительным использование больших значений  $M$  даже с учетом возможностей современных компьютеров.

Суммируя вышесказанное, можно заключить, что в численных методах, использующих разложение по азимутальным гармоникам, не удастся добиться условий вычислений, при которых не искажаются реальные индикатрисы рассеяния (за счет малого числа членов разложения (2.2.3)). Именно этот недостаток является главным, “непреодолимым” в указанных методах. Поэтому нельзя согласиться с иногда звучащими утверждениями, что подобные методы являются самыми “точными”, “эталонными”. Это, возможно, так, если рассматривать чисто математические аспекты вычислений. Но это совсем не так, если говорить о физической адекватности результатов модельных расчетов свойствам реальных объектов и процессов.

### 2.3. Метод последовательных порядков рассеяния

#### Особенности метода

Нам еще придется вернуться к ряду общих вопросов переноса рассеянного излучения в следующем разделе. Но уже сейчас можно перейти к первому конкретному численному методу теории переноса.

Общее описание особенностей численных методов удобно приводить не после, а до их изложения. Это как бы чистая информация, еще не нагруженная математическим формализмом, своего рода реклама, призванная пробудить интерес к изучению метода. Поэтому далее для всех рассматриваемых численных методов будем приводить их общие и сравнительные характеристики в самом начале, даже еще до изложения идеи метода.

Метод последовательных порядков рассеяния (МПР) исторически является самым старым численным методом теории переноса излучения. Его основным достоинством является физическая наглядность, т.к. он позволяет детально исследовать процесс формирования поля рассеянного излучения, оценить зависимость результата от кратностей рассеяния и отражения. Этот метод тесно связан с теорией переноса излучения. В рамках МПР несложно учесть самый широкий класс типов отражающих поверхностей (не только изотропное отражение). МПР применим как для рассеянного солнечного, так и для теплового излучения. Основной недостаток МПР заключается в его медленной работе, в общем случае это самый медленный из всех численных методов. Особенно медленно он работает для видимого диапазона спектра, где альbedo однократного рассеяния близко к единице. По этой причине МПР неприменим для облачной атмосферы. С другой стороны, для переноса теплового излучения в ИК и МКВ диапазонах, где рассеяние может рассматриваться лишь как малая добавка к поглощению, МПР может стать весьма быстрым и, учитывая перечисленные выше достоинства, – самым эффективным.

### Интегральное уравнение для функции источников

Подставляя выражения для интенсивностей излучения через функции источников (2.2.14) в формулу функции источников рассеянного солнечного излучения (2.2.13), получаем интегральное уравнение для функции источников

$$\begin{aligned}
 B^m(\tau, \eta) = & \frac{\Lambda(\tau)}{2} \left( \int_0^1 p^m(\tau, \eta, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'} \int_0^\tau B^m(\tau', \eta') \exp\left(-\frac{\tau - \tau'}{\eta'}\right) d\tau' - \right. \\
 & \left. - \int_{-1}^0 p^m(\tau, \eta, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'} \int_\tau^{\tau_0} B^m(\tau', \eta') \exp\left(-\frac{\tau - \tau'}{\eta'}\right) d\tau' \right) + \\
 & + \frac{\Lambda(\tau)}{4} S p^m(\tau, \eta, \eta_0) \exp(-\tau/\eta_0). \tag{2.3.1}
 \end{aligned}$$

Теперь наша задача – решить (2.3.1) и найти все функции  $B^m(\tau, \eta)$ . После этого искомая интенсивность рассчитывается с учетом ряда (2.2.9) через величины  $I^m(\tau, \eta)$ , которые получатся из выражения (2.2.14) с использованием алгоритма, описанного в разделе 2.1.

### Операторный вид интегрального уравнения

Пусть имеется соотношение между функциями  $f(x)$  и  $g(x)$  вида  $g(x) = \int_a^b K(x, x') f(x') dx'$ . Условимся записывать его как  $\mathbf{g} = \mathbf{Kf}$ , где  $\mathbf{g} \equiv g(x)$ ,  $\mathbf{f} \equiv f(x)$ ,  $\mathbf{K}$  – интегральный оператор, а функция  $K(x, x')$  называется его ядром. Смысл такой операторной формы записи: действие оператора  $\mathbf{K}$  на функцию  $\mathbf{f}$  полностью аналогично умножению матрицы на вектор в конечномерном случае.

В уравнении (2.3.1) переменных не одна, а две, но это не принципиально. Важно лишь, чтобы интегрирование в операторной форме велось по полным пределам изменения аргументов (от -1 до 1 для  $\eta'$ , от 0 до  $\tau_0$  для  $\tau'$ ). Записывая (2.3.1) в операторной форме имеем

$$\mathbf{V}^m = \mathbf{K}^m \mathbf{V}^m + \mathbf{q}^m, \tag{2.3.2}$$

где  $\mathbf{V}^m$  – искомая функция источников  $B^m(\tau, \eta)$ ,  $\mathbf{K}^m$  – интегральный оператор с ядром

$$K^m(\tau, \eta, \tau', \eta') = \begin{cases} \frac{\Lambda(\tau)}{2} \frac{p^m(\tau, \eta, \eta')}{|\eta'|} \exp\left(-\left|\frac{\tau - \tau'}{\eta'}\right|\right) \\ \text{в областях } 0 \leq \tau' \leq \tau, 0 \leq \eta' \leq 1 \text{ и } \tau \leq \tau' \leq \tau_0, -1 \leq \eta' \leq 0, \\ 0 \text{ в областях, отличных от приведенных выше,} \end{cases} \tag{2.3.3}$$

$\mathbf{q}^m$  – свободный член

$$q^m(\tau, \eta) = \frac{\Lambda(\tau)}{4} S p^m(\tau, \eta, \eta_0) \exp(-\tau/\eta_0). \tag{2.3.4}$$

Сразу отметим структуру ядра (2.3.3): оно имеет блочно-диагональный вид – см. рис.2.1, где штриховкой показаны ненулевые области ядра. Причина использования модулей в (2.3.3) станет ясна в следующем разделе.



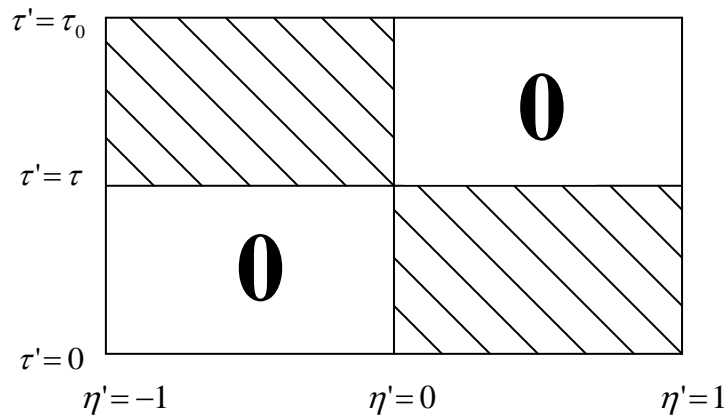


Рис.2.1. Структура ядра интегрального оператора (2.3.3).

### Решение интегрального уравнения – ряд Неймана

Интегральное уравнение вида (2.3.2) является уравнением Фредгольма второго рода: оно хорошо известно и исследовано в математике. Его решением является ряд Неймана

$$\mathbf{V}^m = \mathbf{q}^m + \mathbf{K}^m \mathbf{q}^m + (\mathbf{K}^m)^2 \mathbf{q}^m + (\mathbf{K}^m)^3 \mathbf{q}^m + \dots, \quad (2.3.5)$$

где степень оператора определена как его последовательное применение:  $(\mathbf{K}^m)^2 \mathbf{q}^m = \mathbf{K}^m (\mathbf{K}^m \mathbf{q}^m)$ ,  $(\mathbf{K}^m)^3 \mathbf{q}^m = \mathbf{K}^m ((\mathbf{K}^m)^2 \mathbf{q}^m)$  и т.д. Доказательство, что ряд Неймана является решением, очень простое: достаточно подставить (2.3.5) в (2.3.2). Поскольку ряд (2.3.5) является бесконечным, то справа и слева будет одно и то же.

Физический смысл ряда (2.3.5) – это разложение искомой функции источников, следовательно, и интенсивности излучения по кратности рассеяния [1,2]: первый член ряда соответствует однократному рассеянию, второй – двукратному и т.д.

### Идея метода последовательных порядков рассеяния

МПР основан на последовательном вычислении и суммировании членов ряда Неймана (2.3.5): сначала вычисляем  $\mathbf{q}^m$ , потом применяем к нему интегральный оператор и получаем  $\mathbf{K}^m \mathbf{q}^m$ , потом применяем интегральный оператор к только что полученному результату –  $(\mathbf{K}^m)^2 \mathbf{q}^m$  и т.д.

### Исходные данные – модель атмосферы для расчетов

Для реализации МПР на заданной сетке высот в атмосфере  $z_i$ ,  $i=1, \dots, N$  должны быть заданы: вертикальный профиль объемного коэффициента рассеяния  $\sigma_i(z_i)$ , вертикальный профиль объемного коэффициента поглощения  $k_i(z_i)$ , а также коэффициенты разложения индикатрисы рассеяния в ряд по полиномам Лежандра  $x_j(z_i)$ , где  $j=1, \dots, M$ ,  $M$  – выбранное для расчетов число азимутальных гармоник (см. раздел 2.2). Напомним, что все вертикальные профили заданы для конкретной длины волны излучения. Кроме того задан косинус зенитного угла Солнца  $\eta_0$  и внеатмосферный поток солнечного излучения  $\pi S$ .

### Преобразования исходных данных и общая организация вычислений

Первой операцией является переход от сетки высот к сетке оптических глубин (см. раздел 2.1), в результате чего мы имеем таблицы  $\tau_i$ ,  $\Lambda_i(\tau_i)$ ,  $x_j(\tau_i)$ ,

$i = 1, \dots, N$ . Далее вычисления производятся циклическим применением МПР к каждой гармонике, начиная с нулевой. Это удобно в плане практической организации вычисления функций  $p^m(\tau, \eta, \eta')$  (см. раздел 2.2 и Приложение 6). После получения функций источников каждой гармонике для нее по (2.2.14) находятся гармоники интенсивности, которые потом уже окончательно суммируются по ряду (2.2.9), давая искомое решение задачи.

Поскольку каждая гармоника функции источников находится независимо, будем далее рассматривать алгоритм МПР конкретно для нее, т.е. для заданного индекса  $m$ . Чтобы не загромождать формулы, договоримся при описании алгоритмов опускать этот индекс.

### **Внутренние данные и параметры**

Для применения интегрального оператора необходимо выбрать квадратурные формулы по оптической глубине и косинусу зенитного угла.

Для таблицы оптической глубины естественно использовать формулу трапеций вида (1.2.9). Ее узлами будут сами точки  $\tau_i$ , а веса согласно (1.2.9) будут зависеть от положения точки в интервале интегрирования. Поэтому введем для них обозначения общего вида  $d^{(\tau)}(i_1, i_2, i_3)$ , где  $i_1$  – номер начальной точки интервала интегрирования,  $i_3$  – номер конечной точки,  $i_2$  – номер текущей точки (в (1.2.9)  $i_1 = 1$ ,  $i_3 = N$ ,  $i_2 = i$ ), причем формально положим  $d^{(\tau)}(i_1, i_2, i_1) = 0$ .

Для интегрирования по косинусу угла стандартно используется квадратурная формула Гаусса. Определение ее узлов и весов дано в Приложении 5. Как уже отмечалось, формула Гаусса не имеет каких-то решающих преимуществ перед простой формулой трапеций. Поэтому введем для весов интегрирования по косинусу угла аналогичные обозначения общего вида  $d^{(\eta)}(i_1, i_2, i_3)$ , а узлы запишем как  $\eta_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , где  $K$  – выбранное число узлов. Напомним, что чем больше номер азимутальной гармоники, тем, вообще говоря, следует брать большее значение  $K$ . При этом удобно выбрать интервал интегрирования от 0 до 1, т.к. косинусы в диапазоне от 0 до -1 получаются из него просто изменением знака. В итоге имеем таблицу узлов  $\pm \eta_k$ ,  $k = 1, \dots, K$  (всего узлов  $2K$ ). Отметим, что значение  $\eta = 0$  использовать нельзя, поэтому в формуле трапеций интегрирование следует вести от какого-нибудь близкого к нулю значения (например,  $\eta = 0.01$ ).

Теперь можно вычислить массив данных  $p(\tau_i, \pm \eta_k, \pm \eta'_k)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $k = 1, \dots, K$ ,  $k' = 1, \dots, K$  (см. раздел 2.2).

### **Схема алгоритма МПР**

Вводим массив для общего суммирования функции источников  $B(\tau_i, \pm \eta_k)$  и два таких же – для вычислений текущего приближения  $B_1(\tau_i, \pm \eta_k)$  и  $B_2(\tau_i, \pm \eta_k)$ . В качестве первой операции присваиваем свободный член (2.3.4):

$$B(\tau_i, \pm \eta_k) = B_1(\tau_i, \pm \eta_k) = \frac{\Lambda(\tau_i)}{4} Sp(\tau_i, \pm \eta_k, \eta_0) \exp(-\tau_i / \eta_0), \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, K.$$

Далее проводим итерации для вычисления величин  $B_2(\tau_i, \pm \eta_k)$  согласно (2.3.3)

$$B_2(\tau_i, \pm \eta_k) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Lambda(\tau_i)}{2} \sum_{k'=1}^K \frac{p(\tau_i, \pm\eta_k, \eta_{k'})}{\eta_{k'}} d^{(n)}(1, k', K) \sum_{i'=i}^N B_1(\tau_{i'}, \eta_{k'}) \exp\left(-\frac{\tau_i - \tau_{i'}}{\eta_{k'}}\right) d^{(\tau)}(i, i', N) + \\
&+ \frac{\Lambda(\tau_i)}{2} \sum_{k'=1}^K \frac{p(\tau_i, \pm\eta_k, -\eta_{k'})}{\eta_{k'}} d^{(n)}(1, k', K) \sum_{i'=1}^i B_1(\tau_{i'}, -\eta_{k'}) \exp\left(-\frac{\tau_i - \tau_{i'}}{\eta_{k'}}\right) d^{(\tau)}(1, i', i), \\
&i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, K. \tag{2.3.6}
\end{aligned}$$

После вычисления по (2.3.6) производим суммирование

$$B(\tau_i, \pm\eta_k) := B(\tau_i, \pm\eta_k) + B_2(\tau_i, \pm\eta_k).$$

Чтобы не загромождать рекуррентные алгоритмы лишними обозначениями, здесь и далее договоримся использовать операцию присваивания “:=” из программирования, означающую присваивание левой части выражения, значения правой, т.е. сначала вычисляется выражение справа от операции, а потом присваивается переменной слева. Например,  $t := t + 1$  означает увеличение значения  $t$  на единицу.

В качестве критерия прекращения итераций стандартно выбирают либо их заданное число (т.е. учитываемую кратность рассеяния, что позволяет исследовать формирование поля излучения и оценивать влияние рассеяний заданной кратности), либо оценивают долю вклада  $B_2(\tau_i, \pm\eta_k)$  в общую сумму. В последнем случае итерации прекращаются, если, например, отношение всех значений  $B_2(\tau_i, \pm\eta_k)$  к соответствующим значениям  $B(\tau_i, \pm\eta_k)$  меньше заданной доли для всех  $i = 1, \dots, N$ ,  $k = 1, \dots, K$ ,  $k' = 1, \dots, K$ . В случае продолжения итераций присваиваем  $B_1(\tau_i, \pm\eta_k) := B_2(\tau_i, \pm\eta_k)$  и переходим на вычисления по (2.3.6). В случае прекращения  $B(\tau_i, \pm\eta_k)$  есть искомый результат.

### О МПР без азимутальных гармоник

В принципе, учитывая возможности современных компьютеров, можно пытаться реализовать МПР и без разложения по азимутальным гармоникам, т.е. для исходной функции источника с зависимостью от азимута (2.1.11). При этом индексов в массиве функции станет три, столько же будет сумм в выражении вида (2.3.6). Таким образом, объем вычислений увеличится примерно на два порядка. Зато искомая функция будет только одна, и, главное, исчезнут проблемы, связанные с азимутальными гармониками (см. раздел 2.2). Конечно, для массовых расчетов, где требуется высокая скорость, такой подход неприемлем, но он вполне возможен для специальных исследований, “эталонных” расчетов и т.п. Предлагаем читателю написать соответствующую этому случаю модификацию приведенной выше схемы алгоритма в качестве упражнения. Мы еще вернемся к этой теме в шестой главе.

### МПР для теплового излучения

МПР легко модифицируется для рассеяния теплового излучения, причем в этом случае возникают существенные упрощения. Поскольку тепловое излучение изотропно (не зависит от направления), то оно будет влиять только на нулевую гармонику. Математическое доказательство: – в разложении константы по (2.2.9) будет лишь член с  $m = 0$ . Это отражено и в уже приведенной записи функции источников теплового излучения (2.2.15). Далее учитываем, что если свойством независимости от азимута обладает отражение и собственное излучение поверхности, то для теплового излучения нулевая гармоника оказывается *вообще единственной*. Таким образом, в стандартном

случае равновесного теплового излучения в МПР достаточно рассматривать лишь нулевую гармонику.

Проведем для теплового излучения модификацию изложенной выше схемы алгоритма. В качестве начального значения теперь присваиваем свободный член из (2.2.15):

$$B_1(\tau_i, \pm\eta_k) = (1 - \Lambda(\tau_i))B_e(\lambda, T(\tau_i)).$$

Кроме того, сюда необходимо сразу добавить собственное излучение поверхности (см. раздел 1.4). Для изотропного излучения (1.4.8) имеем

$$B_1(\tau_1, -\eta_k) := B_1(\tau_1, -\eta_k) + \varepsilon_\lambda B_e(\lambda, T_s),$$

для направленного (1.4.11)

$$B_1(\tau_1, -\eta_k) := B_1(\tau_1, -\eta_k) + \varepsilon_\lambda(\eta_k)B_e(\lambda, T_s).$$

Заметим, что присваивание происходит только для поверхности ( $i=1$ ) и для отрицательного диапазона косинусов зенитных углов (излучение вверх). Далее нужно присвоить  $B(\tau_i, \pm\eta_k) = B_1(\tau_i, \pm\eta_k)$ , после чего переходим на итерации описанного выше алгоритма. Отметим, что нулевой итерации (начальному присваиванию) соответствует прямое излучение.

Поскольку для теплового излучения присутствует только нулевая гармоника, для него снимаются проблемы разложения (см. разделе 2.2), т.к. нулевая гармоника является самой гладкой. Кроме того, в ИК диапазоне всегда присутствует достаточное молекулярное поглощение, то есть значения  $\Lambda(\tau_i)$  не слишком близки к единице. Следовательно, можно ожидать, что итерации по (2.3.6) будут сходиться быстро. Далее замечаем, что рассеянное тепловое излучение, как правило, является малой добавкой к прямому излучению. Следовательно, его можно вычислять с меньшей точностью. В частности можно брать редкую сетку высот: для прямого излучения – свою сетку, а для рассеянного – свою, выбираемую, например, по оптической толщине рассеяния. Это позволяет существенно ускорить расчеты. Наконец, отметим, что в дальнем ИК и МКВ диапазоне рассеивающие частицы (даже облаков!) малы по сравнению с длиной волны. Поэтому в качестве индикатрисы рассеяния можно брать релеевскую (2.2.17), для которой функция  $p^0(\eta, \eta')$  задается простым выражением (2.2.19) и не требует никаких предварительных расчетов.

Подводя итоги, можно сказать, что при умелом применении МПР может оказаться самым эффективным методом для рассеянного теплового излучения.

## 2.4. Учет поверхности при рассеянии излучения

### Отражение излучения от поверхности

Две простейшие модели отражения излучения от поверхности (изотропная и идеальная зеркальная) нами уже рассмотрены в разделе 1.4. Теперь изложим общий подход к учету отражения.

Связь между интенсивностями отраженного излучения в направлении  $(\mathcal{G}, \varphi)$  и падающего на поверхность излучения из направления  $(\mathcal{G}', \varphi')$  в общем случае определяется соотношением

$$I^{(r)}(\mathcal{G}, \varphi) = r(\mathcal{G}, \mathcal{G}', \varphi - \varphi')I(\mathcal{G}', \varphi'), \quad (2.4.1)$$

где  $r(\mathcal{G}, \mathcal{G}', \varphi - \varphi')$  – характеризующий свойства поверхности двунаправленный (bidirectional) коэффициент отражения [1,2]. В записи (2.4.1) мы сразу учли, что,

в силу произвольности отсчета азимута,  $r(\vartheta, \vartheta', \varphi - \varphi')$  есть функция не четырех, а трех независимых переменных.

Если излучение на поверхность падает со всех направлений, то надо проинтегрировать его по углу и азимуту. Переходя от углов к их косинусам, получаем

$$I^{(r)}(\eta, \varphi) = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 r(-\eta, \eta', \varphi - \varphi') I(\eta', \varphi') d\eta'. \quad (2.4.2)$$

Напомним, что по условиям нашей задачи двунаправленный коэффициент отражения  $r(\vartheta, \vartheta', \varphi - \varphi')$  исходно задан (для конкретной длины волны!). Заметим, что в (2.4.2) всегда  $\eta' > 0$  (косинус зенитного угла падающего излучения), а  $\eta < 0$  (косинус зенитного угла отраженного излучения), но в функции  $r(\eta, \eta', \varphi - \varphi')$  все косинусы, по определению, положительные.

Поскольку мы выражаем интенсивность через функцию источников, необходимо получить аналог выражения (2.4.2) и для них. Начнем с левой части.  $I^{(r)}(\eta, \varphi)$  – это интенсивность излучения в одном направлении, причем на оптической глубине  $\tau = \tau_0$ . Но тогда, принимая во внимание второе соотношение (2.1.13) для связи интенсивности и функции источников, при  $\tau \rightarrow \tau_0$  получаем  $B^{(r)}(\eta, \varphi) = |\eta| I^{(r)}(\eta, \varphi)$ . Теперь подставляя в (2.4.2) первое из соотношений (2.1.13), получаем

$$\frac{1}{|\eta|} B^{(r)}(\eta, \varphi) = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 r(-\eta, \eta', \varphi - \varphi') \frac{d\eta'}{\eta'} \int_0^{\tau_0} B(\tau', \eta', \varphi') \exp\left(-\frac{\tau_0 - \tau'}{\eta'}\right) d\tau'. \quad (2.4.3)$$

Функция

$$y(-\eta, \eta', \varphi - \varphi') = 2\pi \frac{|\eta|}{\eta'} r(-\eta, \eta', \varphi - \varphi') \quad (2.4.4)$$

называется функцией отражения. Именно она определяет соотношения между функциями источников падающего и отраженного излучения. Тогда из выражения (2.4.3) получаем следующее соотношение

$$B^{(r)}(\eta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 y(-\eta, \eta', \varphi - \varphi') d\eta' \int_0^{\tau_0} B(\tau', \eta', \varphi') \exp\left(-\frac{\tau_0 - \tau'}{\eta'}\right) d\tau'. \quad (2.4.5)$$

Из сравнения формулы (2.4.5) с выражениями для функции источников рассеянного излучения (2.1.11) и интенсивности (2.1.13) можно сделать вывод, что функция  $y(-\eta, \eta, \varphi - \varphi')$  формально аналогична индикатрисе рассеяния. Следовательно, она есть не что иное, как индикатриса отражения.

#### Разложение функций отражения по азимутальным гармоникам

Для двунаправленного коэффициента отражения (2.4.1) и функции  $y(-\eta, \eta, \varphi - \varphi')$  (2.4.4) напишем разложения по азимутальным гармоникам (аналогично (2.2.7) и (2.2.9))

$$\begin{aligned} r(-\eta, \eta', \varphi) &= r^0(-\eta, \eta') + 2 \sum_{m=1}^M r^m(-\eta, \eta') \cos m(\varphi - \varphi'), \\ y(-\eta, \eta', \varphi) &= y^0(-\eta, \eta') + 2 \sum_{m=1}^M y^m(-\eta, \eta') \cos m(\varphi - \varphi'). \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Подставляя (2.4.6) и (2.2.9) в соотношения для отраженного излучения (2.4.2) и (2.4.5), затем интегрируя по азимуту и приравнивая гармоники с одинаковыми номерами, получаем

$$I^{(r)m}(\tau_0, \eta) = 2\pi \int_0^1 r^m(-\eta, \eta') I^m(\tau_0, \eta') d\eta',$$

$$B^{(r)m}(\tau_0, \eta) = \int_0^1 y^m(-\eta, \eta') d\eta' \int_0^{\tau_0} B^m(\tau', \eta') \exp\left(-\frac{\tau_0 - \tau'}{\eta'}\right) d\tau'. \quad (2.4.7)$$

Вопрос о конкретном вычислении функций  $r^m(-\eta, \eta')$  и  $y^m(-\eta, \eta')$  оставим открытым. По условиям задачи они должны быть нам исходно заданы, как свойства отражающей поверхности. С другой стороны, можно заметить, что разложения вида (2.2.9) и (2.4.6) есть не что иное, как разложение в ряд Фурье, причем этот ряд “косинусный”, т.к. соответствует четной функции. А с разложениями функций в ряд Фурье вычислительных проблем быть не должно – для этого имеются явные формулы, обширная литература, алгоритмы и т.п. Таким образом, для конкретных моделей отражения будем считать расчет функций  $r^m(-\eta, \eta')$  решенной задачей.

Отметим, что нередко в модели отражения вообще не вводят зависимость от азимута. Тогда в разложениях (2.4.7) присутствует лишь нулевая гармоника.

#### **Модели изотропного и идеального зеркального отражения**

Рассмотрим теперь с общей точки зрения две простейшие модели: изотропного и идеально зеркального отражения. В обеих моделях нет зависимости от азимута, поэтому остаются только нулевые гармоники рассеянного излучения.

Модель изотропного отражения. Поверхность характеризуется скалярной величиной – альбедо  $A$ . Интенсивность отраженного излучения определяется через падающий поток соотношением (1.4.7). В этом и состоит определенная трудность, поскольку необходимо вычислять не падающую на поверхность интенсивность, а весь полусферический поток (1.1.13). Получаем цепочку формул от исходных соотношений для интенсивностей через функции источников для нулевых азимутальных гармоник:

$$I^{(r)0}(\tau_0, \eta, \varphi) = \frac{A}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 I(\tau_0, \eta', \varphi') \eta' d\eta' =$$

$$= \frac{A}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \int_0^{\tau_0} B(\tau', \eta', \varphi') \exp\left(-\frac{\tau_0 - \tau'}{\eta'}\right) d\eta' d\tau',$$

$$I^{(r)0}(\tau_0, \eta) = 2A \int_0^1 I^0(\tau_0, \eta') \eta' d\eta' = 2A \int_0^1 \int_0^{\tau_0} B^0(\tau', \eta') \exp\left(-\frac{\tau_0 - \tau'}{\eta'}\right) d\eta' d\tau',$$

$$B^{(r)0}(\tau_0, \eta) = 2A |\eta| \int_0^1 \int_0^{\tau_0} B^0(\tau', \eta') \exp\left(-\frac{\tau_0 - \tau'}{\eta'}\right) d\eta' d\tau'. \quad (2.4.8)$$

Отметим, что необходимость интегрирования в (2.4.8) смягчается тем, что его результат является скаляром (интенсивность отраженного излучения не зависит от направления).

Модель идеального зеркального отражения. В этом случае направления отраженного и падающего излучений жестко определены (угол отражения равен углу падения, а азимут отраженного излучения меняется на  $\pi$ ). Интегрировать по углам не нужно, поэтому мы получаем

$$\begin{aligned}
I^{(r)}(\tau_0, \eta, \varphi) &= r(-\eta)I(\tau_0, -\eta, \varphi - \pi) = r(-\eta) \int_0^{\tau_0} B(\tau', -\eta, \varphi - \pi) \exp\left(-\frac{\tau_0 - \tau'}{\eta}\right) d\tau', \\
I^{(r)0}(\tau_0, \eta) &= r(-\eta)I^0(\tau_0, -\eta) = r(-\eta) \int_0^{\tau_0} B^0(\tau', -\eta) \exp\left(-\frac{\tau_0 - \tau'}{\eta}\right) d\tau', \\
B^{(r)0}(\tau_0, \eta) &= |\eta| r(-\eta) \int_0^{\tau_0} B^0(\tau', -\eta) \exp\left(-\frac{\tau_0 - \tau'}{\eta}\right) d\tau', \tag{2.4.9}
\end{aligned}$$

где  $r(-\eta)$  – коэффициент отражения, определенный по (1.4.6).

### Отражение как дополнительный источник излучения

Идея учета поверхности в задачах расчета поля рассеянного излучения в атмосфере заключается в том, что отраженное от поверхности излучение рассматривается как его дополнительный источник. Действительно, решив задачу переноса излучения без учета отражения, мы можем найти интенсивность падающего на поверхность излучения. Это излучение согласно (2.4.5) и (2.4.7) создает дополнительные источники. Для них следует вновь решить задачу переноса излучения (без поверхности). Полученная интенсивность на поверхности вновь создаст дополнительные источники и т.д. В силу линейности уравнения переноса все полученные интенсивности (а также функции источников) следует сложить, что и даст окончательное решение задачи расчета поля рассеянного излучения с учетом его отражения от поверхности.

### Разложение по кратности отражения

Запишем теперь вышеизложенные рассуждения на языке формул, причем для их компактности сразу используем введенный в разделе 2.3 операторный стиль.

Функция источников рассеянного излучения без учета отражения  $\mathbf{B}^m$  определяется рядом (2.3.6). Перепишем его в виде

$$\mathbf{B}^m = \mathbf{T}^m \mathbf{q}^m, \tag{2.4.10}$$

где  $\mathbf{T}^m$  – оператор переноса рассеянного излучения

$$\mathbf{T}^m = \mathbf{1} + \mathbf{K}^m + (\mathbf{K}^m)^2 + (\mathbf{K}^m)^3 + \dots, \tag{2.4.11}$$

в котором  $\mathbf{1}$  – единичный интегральный оператор, оставляющий без изменений функцию, на которую он действует (в качестве упражнения напишите его ядро). Дополнительная функция источников вследствие отражения определяется соотношением (2.4.7) и в операторной форме принимает вид

$$\mathbf{B}^{(r)m} = \mathbf{R}^m \mathbf{B}^m, \tag{2.4.12}$$

где  $\mathbf{R}^m$  – оператор отражения с ядром

$$R^m(\tau, \eta, \tau', \eta') = \begin{cases} y^m(\eta, \eta') \exp\left(-\frac{\tau_0 - \tau'}{\eta'}\right), & \text{если } \tau = \tau_0 \text{ и } \eta < 0 \text{ и } \eta' > 0 \\ 0, & \text{если } \tau \neq \tau_0 \text{ или } \eta > 0 \text{ или } \eta' < 0 \end{cases}. \tag{2.4.13}$$

Далее следует найти поле рассеянного излучения для функции источников  $\mathbf{B}^{(r)m} = B^{(r)m}(\tau_0, \eta)$ . Она соответствует освещению атмосферы не сверху, а снизу. Обозначим, следуя [1,2], для этого случая все величины “волной”. Решение, как несложно понять, снова дается рядом Неймана (2.3.6)

$$\tilde{\mathbf{B}}^m = \tilde{\mathbf{q}}^m + \tilde{\mathbf{K}}^m \tilde{\mathbf{q}}^m + (\tilde{\mathbf{K}}^m)^2 \tilde{\mathbf{q}}^m + (\tilde{\mathbf{K}}^m)^3 \tilde{\mathbf{q}}^m + \dots, \tag{2.4.14}$$

но теперь все величины в нем берутся для “перевернутой атмосферы”, где нижняя граница стала источником излучения. Но тогда, формально меняя  $\tau$  на  $\tau_0 - \tau$ , а надирные углы считая зенитными, получаем для ядра оператора  $\tilde{\mathbf{K}}^m$  почти тот же вид, что и выражение (2.3.3) (вот зачем там нужны были модули!), с единственным отличием: нужно сменить ненулевые области на  $\tau \leq \tau' \leq \tau_0, -1 \leq \eta' \leq 0$  и  $0 \leq \tau' \leq \tau, 0 \leq \eta' \leq 1$ . То есть в (2.3.5) ненулевые блоки для  $\tilde{\mathbf{K}}^m$  будут расположены на неглавной диагонали, а для свободного члена теперь имеем

$$\tilde{q}^m(\tau, \eta) = \begin{cases} B^{(r)m}(\tau_0, \eta) \exp\left(-\frac{\tau_0 - \tau}{|\eta|}\right), & \text{если } \eta < 0 \\ 0, & \text{если } \eta > 0 \end{cases}. \quad (2.4.15)$$

Ряд (2.4.14) также запишем с использованием оператора переноса рассеянного излучения при освещении снизу

$$\tilde{\mathbf{B}}^m = \tilde{\mathbf{T}}^m \tilde{\mathbf{q}}^m, \quad (2.4.16)$$

где

$$\tilde{\mathbf{T}}^m = \mathbf{1} + \tilde{\mathbf{K}}^m + (\tilde{\mathbf{K}}^m)^2 + (\tilde{\mathbf{K}}^m)^3 + \dots, \quad (2.4.17)$$

Найдя функцию источников по (2.4.14) вновь применяем к ней оператор отражения (2.4.12) и (2.4.13) и т.д. В итоге получаем ряд для искомой функции источников  $\tilde{\mathbf{B}}^m$  с учетом отражения от поверхности (что обозначим “чертой”)

$$\tilde{\mathbf{B}}^m = \mathbf{B}^m + \tilde{\mathbf{T}}^m \mathbf{R} \mathbf{B}^m + \tilde{\mathbf{T}}^m \mathbf{R} \tilde{\mathbf{T}}^m \mathbf{R} \mathbf{B}^m + \dots \quad (2.4.18)$$

В компактной записи через степени операторов и исходный свободный член уравнения переноса выражение (2.4.18) можно переписать в виде

$$\tilde{\mathbf{B}}^m = \mathbf{T}^m \mathbf{q}^m + \tilde{\mathbf{T}}^m \mathbf{R} \mathbf{T}^m \mathbf{q}^m + (\tilde{\mathbf{T}}^m \mathbf{R})^2 \mathbf{T}^m \mathbf{q}^m + (\tilde{\mathbf{T}}^m \mathbf{R})^3 \mathbf{T}^m \mathbf{q}^m + \dots, \quad (2.4.19)$$

который известен как разложение функции источников (и, следовательно, интенсивности) поля рассеянного излучения по кратности отражения. Действительно, первый член соответствует отражению нулевой кратности, второй – однократному, третий – двукратному и т.д.

Таким образом, для учета отражения от поверхности в общем случае необходимо *дважды* решать задачу переноса рассеянного излучения в атмосфере без отражения (при освещении сверху и снизу) а затем еще и суммировать ряд (2.4.10). Это довольно громоздкая схема с точки зрения практических вычислений. Как отмечалось выше, для моделей отражения без азимутальной зависимости (в частности, идеальных изотропной и зеркальной) учет отражения достаточно выполнить лишь для нулевой гармоники.

### Прямое излучение

Вернемся к постановке задачи нахождения интенсивности рассеянного излучения. При выводе уравнения переноса (2.1.8) и его граничных условий (2.1.9) мы исключили из него прямое и отраженное излучения. Учет отражения рассеянного излучения сейчас был рассмотрен. Но ведь прямое (без рассеяния) излучение тоже отражается, поэтому необходимо это учесть. Повторяя приведенные выше рассуждения, это довольно легко сделать.

Обозначим интенсивность прямого излучения на поверхности  $I_0(\eta, \varphi)$ . Тогда согласно (2.4.2) и (2.4.3) имеем

$$B^{(r)}(\eta, \varphi) = |\eta| \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 r(-\eta, \eta', \varphi - \varphi') I_0(\eta', \varphi') d\eta', \quad (2.4.20)$$



а с учетом разложения функции  $r^m(-\eta, \eta')$  по азимутальным гармоникам (2.4.6) получаем

$$B^{(r)m}(\tau_0, \eta) = 2\pi |\eta| \int_0^1 r^m(-\eta, \eta') I_0^m(\tau_0, \eta') d\eta'. \quad (2.4.21)$$

А далее для источников прямого излучения (2.4.21) достаточно повторить все рассуждения для вывода ряда кратностей отражения (2.4.18). Окончательно получаем функцию источников рассеянного излучения для вклада от прямого излучения с учетом отражения от поверхности

$$\bar{\mathbf{B}}_0^m = \tilde{\mathbf{T}}^m \mathbf{R}_0^m \mathbf{I}_0^m + \tilde{\mathbf{T}}^m \mathbf{R}^m \tilde{\mathbf{T}}^m \mathbf{R}_0^m \mathbf{I}_0^m + (\tilde{\mathbf{T}}^m \mathbf{R}^m)^2 \tilde{\mathbf{T}}^m \mathbf{R}_0^m \mathbf{I}_0^m + \dots, \quad (2.4.22)$$

где  $\mathbf{R}_0^m$  – оператор отражения прямого излучения с ядром (2.4.21)

$$R_0^m(\tau, \eta, \tau', \eta') = \begin{cases} 2\pi |\eta| r^m(\eta, \eta'), & \text{если } \tau = \tau' = \tau_0 \text{ и } \eta < 0 \text{ и } \eta' > 0 \\ 0, & \text{если } \tau \neq \tau' \neq \tau_0 \text{ или } \eta > 0 \text{ или } \eta' < 0 \end{cases}. \quad (2.4.23)$$

Для получения общего решения осталось сложить (2.4.22) с (2.4.19). (Предоставляем эту возможность читателям.) В полученную сумму следует еще добавить функцию источников  $\mathbf{B}_0^m$ , соответствующую прямому излучению (т.е. без рассеяния до и после отражения).

Рассмотрим теперь конкретно, что представляет собой прямое излучение на поверхности для случая солнечного и теплового излучения.

Прямое солнечное излучение. Для него по закону Бугера (1.2.6) имеем

$$I_0(\eta_0) = \pi \mathcal{S} \eta_0 \exp(-\tau_0 / \eta_0), \quad (2.4.24)$$

где множитель  $\eta_0$  возникает из требований пересчета потока  $\pi \mathcal{S}$  с площадки, перпендикулярной лучам, на площадку, параллельную границам атмосферы. Азимутальная зависимость для (2.4.24) отсутствует, поэтому отраженное излучение влияет только на нулевую гармонику. Для идеальных зеркального и изотропного отражения формулы для функции источников (2.4.21) элементарны и не содержат интегралов (получаются из (2.4.8) и (2.4.9)). Для зеркального отражения:

$$B^{(r)0}(\tau_0, -\eta_0) = \pi \mathcal{S} \eta_0^2 r(\eta_0) \exp(-\tau_0 / \eta_0), \quad (2.4.25)$$

где ненулевое значение имеет место только при  $\eta = -\eta_0$ . Для изотропного отражения

$$B^{(r)0}(\tau_0, \eta) = 2\pi \mathcal{A} \mathcal{S} \eta_0 |\eta| \exp(-\tau_0 / \eta_0), \quad (2.4.26)$$

где ненулевые значения возникают при  $\eta < 0$ .

Поскольку источником излучения является Солнце, собственно прямое излучение  $\mathbf{I}_0^m$  есть в данном случае интенсивность диска Солнца. Для безоблачной атмосферы она несравнимо больше интенсивности рассеянного и отраженного излучения и во внимание не принимается. А вот для излучения, прошедшего сквозь просвечивающие облака, необходимо ее учитывать (по закону Бугера (1.2.6)).

Тепловое излучение. С ним ситуация, как ни странно, значительно проще. Прямым излучением с функцией источников  $\mathbf{B}_0^m$  является тепловое излучение каждой точки атмосферы и поверхности (см. разделы 1.4, 2.2 и 2.3). Но тогда, положив  $\mathbf{q}^m = \mathbf{B}_0^m$ , после подстановки в ряды (2.3.6), (2.4.14) и (2.4.19) мы сразу получаем полное решение задачи, не требующее каких-либо еще добавок. Включая и излучение без рассеяния, рассмотренное в разделах 1.3

и 1.4 (первые члены рядов (2.3.6) и (2.4.19)). Причем при учете изотропии теплового излучения все ограничивается единственной нулевой гармоникой. Формулы отражательных и излучательных характеристик теплового излучения для моделей идеальных зеркального и изотропного отражений были приведены в разделе 1.4.

#### **Случай идеального изотропного отражения при расчетах интенсивности солнечного излучения на границах атмосферы**

Выше мы рассматривали общий случай задачи переноса излучения с нахождением интенсивности на любом уровне в атмосфере. Однако в большинстве случаев на практике интерес представляют лишь поля интенсивности излучения на верхней и нижней границах атмосферы, поскольку они соответствуют моделированию измерений приборами (раздел 1.1) с поверхности Земли и из космоса (со спутников). Для подобных задач учет отражения рассеянного солнечного излучения от поверхности допускает определенные упрощения. Следуя [1,2], мы рассмотрим стандартный для таких расчетов случай идеально изотропной поверхности.

В данном случае удастся получить явные выражения для коэффициентов яркости среды, через которые выражаются искомые интенсивности. Подробный их вывод приведен в [1,2], поэтому не будем его воспроизводить, а приведем лишь окончательные результаты. Кроме того, учитывая прикладной стиль данного пособия, сразу заменим коэффициенты яркости на искомые интенсивности, а последовательность формул – на операции алгоритма.

Изотропное отражение влияет только на нулевую гармонику. Все косинусы углов удобно задавать в положительном диапазоне, для чего углы для излучения, идущего сверху, считаются как зенитные, а для излучения, идущего снизу, как надирные. Опуская у гармоники индекс “нуль”, имеем следующий алгоритм.

1) Вычисляем интенсивность рассеянного излучения  $\tilde{I}(\tau_0, \eta, \eta')$  при освещении атмосферы снизу с заданных направлений  $\eta'$ , выходящего через нижнюю же границу в заданных направлениях  $\eta$ . В набор  $\eta'$  необходимо (удобно) включить косинус зенитного угла Солнца  $\eta_0$  (см. ниже).

2) Вычисляем функцию  $\tilde{E}(\tau_0, \eta) = \frac{2}{S} \int_0^1 \tilde{I}(\tau_0, \eta, \eta') d\eta'$ . О вычислении интегралов по косинусам углов (см. внутренние данные алгоритма раздела 2.3).

3) Вычисляем константу  $\tilde{C} = 2 \int_0^1 \tilde{E}(\tau_0, \eta) \eta d\eta$ .

4) Вычисляем интенсивность  $I(0, \eta, \eta_0)$  рассеянного солнечного излучения при освещении атмосферы сверху с косинусом зенитного угла Солнца  $\eta_0$  для набора заданных в 1-ой операции данного алгоритма косинусов  $\eta$  на верхней границе атмосферы.

5) Вычисляем интенсивность  $I(\tau_0, \eta, \eta')$  рассеянного солнечного излучения при освещении атмосферы сверху с набором косинусов зенитных углов солнца  $\eta_0 = \eta'$  для набора заданных в 1-ой операции алгоритма косинусов  $\eta$  на нижней границе атмосферы.

б) Вычисляем функцию  $V(\eta', \tau_0) = \frac{2}{S\eta'_0} \int_0^1 I(\tau_0, \eta, \eta') \eta d\eta + \exp(-\tau_0/\eta')$  (в

[1,2] сделана опечатка). В частности, среди ее значений имеем значение для  $V(\eta_0, \tau_0)$ .

7) Вычисляем искомые интенсивности рассеянного солнечного излучения на границах атмосферы с учетом отражения

$$\begin{aligned} \bar{I}(0, \eta, \eta_0) &= I(0, \eta, \eta_0) + S\eta_0 \frac{AV(\eta, \tau_0)V(\eta_0, \tau_0)}{1-4A\tilde{C}}, \\ \bar{I}(\tau_0, \eta, \eta_0) &= I(0, \eta, \eta_0) + S\eta_0 \frac{A\tilde{E}(\eta, \tau_0)V(\eta_0, \tau_0)}{1-4A\tilde{C}}, \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

где  $A$  – альbedo поверхности.

Определенной трудностью и недостатком указанного алгоритма является необходимость включения в сетку косинусов значения  $\eta_0$  (либо придется еще отдельно вычислять в 5-ой операции  $I(\tau_0, \eta, \eta_0)$ ). Для квадратурной формулы трапеций такое включение элементарно. Но для квадратурной формулы Гаусса, где узлы интегрирования жестко заданы, это, в общем случае, невозможно. Тогда для нахождения  $I(\tau_0, \eta, \eta_0)$  просто используют линейную интерполяцию по косинусам получающейся в 5-ой операции интенсивности  $I(\tau_0, \eta, \eta')$ .

## 2.5. Учет отражения от поверхности в методе последовательных порядков рассеяния

### О возможности расчетов операторов переноса рассеянного излучения

Рассмотрим теперь конкретные алгоритмы и их особенности в случае учета отражения излучения от поверхности в МПР, на чем завершим описание этого метода.

Формально, если рассматривать ряды (2.4.19) и (2.4.22) как решение задачи, необходимо получить операторы переноса рассеянного излучения для освещения сверху  $\mathbf{T}^m$  и снизу  $\tilde{\mathbf{T}}^m$ . Поскольку, в отличие от функций источников, ядра этих операторов зависят от четырех переменных, объем вычислений возрастает на пару порядков. Но при учете возможностей современных компьютеров такой подход имеет смысл рассматривать, например, для особо точных “эталонных” расчетов. Кроме того, он может пригодиться в задачах изучения зависимостей интенсивности излучения от свойств отражающей поверхности (когда берется средняя модель атмосферы с различными параметрами и типами отражающих поверхностей). Поэтому начнем с него, а затем перейдем к более быстрым и эффективным алгоритмам учета отражения при расчете функций источников.

Исходные данные для расчетов, внутренние параметры и переход к дискретной сетке оптических глубин и углов остаются такими же, как рассмотренные в разделе 2.3 (т.е. вертикальная сетка интегрирования с узлами  $\tau_i$ ,  $i=1, \dots, N$  и весами  $d^{(\tau)}(i_1, i_2, i_3)$ , сетка интегрирования по косинусам углов с узлами  $\pm \eta_k$ ,  $k=1, \dots, K$  и весами  $d^{(\eta)}(i_1, i_2, i_3)$ ). К ним нужно добавить входные данные об отражающей поверхности: в общем случае это функции  $y^m(-\eta_k, \eta'_k)$ .

Схема вычислительного алгоритма для операторов переноса рассеянного излучения, очевидно, будет та же, что в разделе 2.3. Необходимо только отметить одно существенное обстоятельство. В предыдущем разделе при изложении теории мы включили в операторы переноса (2.4.11) и (2.4.17) единичный оператор. Однако в численных методах мы этого сделать не можем, т.к. ядром единичного оператора является дельта-функция, которую нельзя задать при дискретном представлении переменных. Выход состоит в том, чтобы добавлять однократное рассеяние и прямое излучение уже при вычислении функции источников.

Итак, для расчета ядра оператора переноса рассеянного излучения при освещении сверху  $\mathbf{T}$ , где, следуя стилю раздела 2.3, верхний индекс “ $m$ ” для компактности записи опускаем, сначала вводим массивы данных  $T(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_{i'}, \pm\eta_{k'})$ ,  $T_1(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_{i'}, \pm\eta_{k'})$ ,  $T_2(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_{i'}, \pm\eta_{k'})$  и  $T_3(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_{i'}, \pm\eta_{k'})$ ,  $i=1, \dots, N$ ,  $i'=1, \dots, N$ ,  $k=1, \dots, K$ ,  $k'=1, \dots, K$  с нулевыми исходными значениями. Согласно (2.3.3) присваиваем начальные значения

$$\begin{aligned} T(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_{i'}, \pm\eta_{k'}) &= T_1(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_{i'}, \pm\eta_{k'}) = T_3(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_{i'}, \pm\eta_{k'}) = \\ &= \frac{\Lambda(\tau_i)}{2|\eta_k|} p(\tau_i, \eta_k, \eta_{k'}) \exp\left(-\left|\frac{\tau_i - \tau_{i'}}{\eta_{k'}}\right|\right), \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

где  $i=1, \dots, N$ ,  $k=1, \dots, K$ ,  $i'=i, \dots, N$  при положительных значениях  $\eta_{k'}$  и  $i'=1, \dots, i$  при отрицательных значениях  $\eta_{k'}$ .

Далее проводим итерации, вычисляя очередную (начиная со второй) степень ядра оператора

$$\begin{aligned} T_2(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_{i'}, +\eta_{k'}) &= \\ &= \sum_{i''=i'}^N \sum_{k''=1}^K T_1(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_{i''}, \pm\eta_{k''}) T_3(\tau_{i''}, \pm\eta_{k''}, \tau_{i'}, +\eta_{k'}) d^{(\tau)}(i', i'', N) d^{(\eta)}(1, k'', K), \\ T_2(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_{i'}, -\eta_{k'}) &= \\ &= \sum_{i''=1}^{i'} \sum_{k''=1}^K T_1(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_{i''}, -\eta_{k''}) T_3(\tau_{i''}, \pm\eta_{k''}, \tau_{i'}, -\eta_{k'}) d^{(\tau)}(1, i'', i') d^{(\eta)}(1, k'', K) \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

для всего диапазона изменения индексов в левой части, и суммируем  $T(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_{i'}, \pm\eta_{k'}) := T(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_{i'}, \pm\eta_{k'}) + T_2(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_{i'}, \pm\eta_{k'})$ , где “:=” – введенный в разделе 2.3 оператор присваивания. Критерием прекращения итераций, как и в разделе 2.3, может служить либо жесткое задание числа кратности рассеяния, либо учет текущей доли вклада  $T_2(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_{i'}, \pm\eta_{k'})$  в общую сумму. В случае продолжения итераций присваиваем  $T_1(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_{i'}, \pm\eta_{k'}) = T_2(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_{i'}, \pm\eta_{k'})$  и переходим на вычисления по (2.5.2).

Для оператора освещения снизу  $\tilde{\mathbf{T}}$  очень удобно использовать описанный в разделе 1.2 “переворот атмосферы” с заменой зенитных углов на надирные. В этом случае вычислительная схема и формулы (2.5.1)-(2.5.2) остаются без изменений. После вычисления ядра оператора  $\tilde{\mathbf{T}}$  следует вернуться в исходную систему координат, пересчитав индексы у оптических глубин и заменив знак у косинусов углов (при реальном программировании это преобразование следует делать не явно, а через функции индексных

подстановок). Как будет указано ниже, на последней итерации ядро оператора  $\tilde{T}$  достаточно вычислить только для одного значения индекса  $i'=1$ .

Имея ядра операторов переноса рассеянного излучения  $T(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_{i'}, \pm\eta_{k'})$  и  $\tilde{T}(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_{i'}, \pm\eta_{k'})$ , несложно написать схему алгоритма итераций по кратностям отражений (2.4.19).

Как и в разделе 2.3, разместим три массива для искомым функций источников  $B(\tau_i, \pm\eta_k)$ ,  $B_1(\tau_i, \pm\eta_k)$ ,  $B_2(\tau_i, \pm\eta_k)$  с начальными значениями

$$B(\tau_i, \pm\eta_k) = B_1(\tau_i, \pm\eta_k) = \frac{\Lambda(\tau_i)}{4} Sp(\tau_i, \pm\eta_k, \eta_0) \exp(-\tau_i / \eta_0), \quad i=1, \dots, N, \quad k=1, \dots, K.$$

Заметим, что записав в массивы функций источников однократное рассеяние, мы учли единичный оператор, отсутствующий в ядре оператора переноса рассеянного излучения. Перед первой операцией отражения вычисляем (сразу многократно!) функцию источников рассеянного излучения

$$B_2(\tau_i, \pm\eta_k) = \sum_{i'=1}^N \sum_{k'=1}^K T(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_{i'}, \pm\eta_{k'}) B_1(\tau_{i'}, \eta_{k'}) d^{(\tau)}(1, i', N) d^{(\eta)}(1, k', K) \quad (2.5.3)$$

для всего набора индексов. Заметим при этом, что массив  $B_1(\tau_i, \pm\eta_k)$  более уже не нужен. Стоит также отметить, что поскольку ядро оператора  $T(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_{i'}, \pm\eta_{k'})$  используется в (2.5.3) только один раз, на самом деле его вычисление не требуется, а достаточно непосредственно вычислить  $B_2(\tau_i, \pm\eta_k)$  по более быстрой схеме алгоритма из раздела 2.3. Запись выражения (2.5.3) понадобилось, чтобы написать исходные формулы расчета ядра (2.5.1) и (2.5.2), которые действительно необходимы для случая освещения атмосферы снизу.

Согласно (2.4.7) на очередной итерации вычисляем функцию источников отраженного излучения

$$\begin{aligned} B^{(r)}(-\eta_k) &= \\ &= \sum_{k'=1}^K y(-\eta_k, +\eta_{k'}) d^{(\eta)}(1, k', K) \sum_{i'=1}^N B_2(\tau_{i'}, +\eta_{k'}) \exp\left(-\frac{\tau_1 - \tau_{i'}}{+\eta_{k'}}\right) d^{(\tau)}(1, i', N) \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

для всех  $k=1, \dots, K$ . На первой итерации (и только для нее!) учитываем по (2.4.21) и (2.4.4) отражение прямого солнечного излучения

$$B_0^{(r)}(-\eta_k) = \pi S \exp(-\tau_1 / \eta_0) \eta_k^2 y(-\eta_k, \eta_0) \quad (2.5.5)$$

Затем складываем суммарное отраженное излучение  $B^{(r)}(-\eta_k) := B^{(r)}(-\eta_k) + B_0^{(r)}(-\eta_k)$  и записываем в искомую функцию источников  $B(\tau_1, -\eta_k) := B(\tau_1, -\eta_k) + B^{(r)}(-\eta_k)$  (здесь  $i=1$  соответствует поверхности!).

Отметим, что этими добавками мы учли как отсутствие единичного оператора в ядре оператора переноса рассеянного излучения при освещении снизу, так и непосредственно отражение прямого излучения от поверхности. Обе эти добавки подействуют при финальном расчете интенсивности по функции источников (2.1.13). Теперь добавляем рассеянное излучение для всего набора индексов  $B(\tau_i, \pm\eta_k) := B(\tau_i, \pm\eta_k) + B_2(\tau_i, \pm\eta_k)$ . Массив  $B_2(\tau_i, \pm\eta_k)$  сейчас свободен. Для окончания итерации осталось учесть поле рассеянного излучения за счет источников от отражения:

$$B_2(\tau_i, \pm\eta_k) = \sum_{k'=1}^K \tilde{T}(\tau_i, \pm\eta_k, \tau_1, -\eta_{k'}) B^{(r)}(-\eta_{k'}) d^{(\eta)}(1, k', K) \quad (2.5.6)$$

для всего набора индексов и также добавить к искомой функции источников:  
 $B(\tau_i, \pm\eta_k) := B(\tau_i, \pm\eta_k) + B_2(\tau_i, \pm\eta_k)$ .

Критерий завершения итераций остается прежним: либо заданная кратность отражений, либо сравнительно малая величина присваиваемой добавки после вычислений по (2.5.6). При продолжении итераций сразу переходим на вычисления по (2.5.4).

### **Возможности непосредственного расчета функции источников**

Как уже отмечалось, описанная выше схема МПР с вычислением ядер операторов неэффективна, т.к. содержит четырехкратные циклы. Для быстрых вычислений можно провести модификацию приведенного в разделе 2.3 алгоритма непосредственного расчета искомой функции источников.

Обратим внимание на функциональный ряд разложения по кратности отражения (2.4.19). Если подставить в него ряды для операторов переноса рассеянного излучения (2.4.11) и (2.4.17) и раскрыть скобки, мы получим набор слагаемых, описывающих все возможные кратности рассеяния и отражения. В принципе, если собирать их, начиная с начала ряда, можно построить вычислительную схему МПР с непосредственным расчетом функции источников.

Понятно, что на практике громоздкие и сложные алгоритмы не нужны. Поэтому реального перемножения рядов не делают, а просто модифицируют схему МПР раздела 2.3, вставляя в нее определенным образом учет отражения. Здесь возможны две стратегии: (1) сначала вычисляется функция источников для многократного рассеяния, а потом уже для нее строится ряд по кратности отражения; (2) ряд по кратности отражения строится для каждой кратности рассеяния отдельно. Оба варианта, в общем случае, не симметрично отражают члены перемноженного ряда. Очевидно, в первом варианте будет преобладание рассеяния над отражением, во втором – наоборот. Однако учитывая приближенный характер численных методов, здесь не просматривается каких-либо проблем. Более того, каждый метод можно использовать избирательно. Например, при малых альbedo поверхности более точным является первый, а при больших – может оказаться предпочтительнее второй (тут еще надо сравнивать альbedo поверхности с альbedo однократного рассеяния).

### **Схема МПР с преобладанием рассеяния**

Вычисляем функцию источников без учета отражения  $B(\tau_i, \pm\eta_k)$  по алгоритму раздела 2.3 и присваиваем  $B_2(\tau_i, \pm\eta_k) = B(\tau_i, \pm\eta_k)$ . В цикле итераций вычисляем по (2.5.4) функцию источников отраженного излучения  $B^{(r)}(-\eta_k)$  и (только на первой итерации отражения!), по (2.5.5) функцию источников отражения от прямого солнечного излучения. Суммируем их и добавляем в искомую  $B(\tau_1, -\eta_k) := B(\tau_1, -\eta_k) + B^{(r)}(-\eta_k)$ . А вот рассеянное излучение ( $B_2(\tau_i, \pm\eta_k)$ ) там уже есть: в отличие от операторного МПР его добавлять не надо. Вычисляем функцию источников рассеянного излучения вследствие отражения по (2.5.6), для чего теперь приведем явный вид ядра ее оператора

$$B_2(\tau_i, \pm\eta_k) = \sum_{k'=1}^K \frac{\Lambda(\tau_i)}{2|\eta_k|} p(\tau_i, \pm\eta_k, -\eta_{k'}) \exp\left(-\left|\frac{\tau_1 - \tau_i}{\eta_{k'}}\right|\right) B^{(r)}(-\eta_{k'}) d^{(n)}(1, k', K), \quad (2.5.7)$$

и добавляем к искомой функции источников  $B(\tau_i, \pm\eta_k) := B(\tau_i, \pm\eta_k) + B_2(\tau_i, \pm\eta_k)$ . Критерий окончания итераций тот же, что и выше (задана либо кратность отражений, либо малость добавки к функции источников).

### Схема МПР с преобладанием отражения

Берем за основу алгоритм раздела 2.3. После вычисления функции источников  $B_2(\tau_i, \pm\eta_k)$  по формуле (2.3.7), суммирования ее с искомой функцией  $B(\tau_i, \pm\eta_k)$  и принятия решения о продолжении итераций открываем цикл итераций по кратностям отражения (внутри текущей итерации по кратностям рассеяния!). Перед ним формально присвоим  $B_3(\tau_i, \pm\eta_k) = B_2(\tau_i, \pm\eta_k)$ , поскольку текущее значение  $B_2(\tau_i, \pm\eta_k)$  надо сохранить. Затем действуем точно так же, как описано выше:

- 1) вычисляем  $B^{(r)}(-\eta_k)$ , причем на первой итерации цикла рассеяния это значение  $B_0^{(r)}(-\eta_k)$ ;
- 2) суммируем с искомой функцией  $B(\tau_i, \pm\eta_k)$  и проводим вычисления по (2.5.7);
- 3) суммируем и принимаем решение о продолжении итераций.

После прекращения итераций по кратности отражения формально восстанавливаем  $B_2(\tau_i, \pm\eta_k) := B_3(\tau_i, \pm\eta_k)$  и переходим на продолжение итераций по кратности рассеяния в схеме алгоритма раздела 2.3.

### МПР при идеальном зеркальном и изотропном отражении

Напомним, что для этих стандартных моделей поверхности отражение влияет только на нулевую гармонику. Поэтому только для нее необходимо использовать любую из описанных выше вычислительных схем. В этих схемах конкретная модель отражения повлияет только на соотношения (2.5.4) и (2.5.5).

Идеальное зеркальное отражение. Вместо (2.5.4) имеем

$$B^{(r)}(-\eta_k) = r(|\eta_k|) \sum_{i=1}^N B_2(\tau_i, +\eta_k) \exp\left(-\frac{\tau_1 - \tau_i}{|\eta_k|}\right) d^{(\tau)}(1, i', N), \quad (2.5.8)$$

где  $r(|\eta_k|)$  – коэффициент отражения (1.4.6). Вместо (2.5.5) необходимо непосредственно использовать соотношение (2.4.25). Однако это создает определенные трудности, поскольку угол  $\eta_0$  должен быть обязательно включен в сетку узлов  $\eta_k$ . Это делает проблематичным использование для идеального зеркального отражения квадратурной формулы Гаусса, поэтому здесь может выручить простая формула трапеций (см. об этом в разделах 2.3 и 2.4).

Идеальное изотропное отражение. Согласно (2.4.8) вместо выражения (2.5.4) имеем

$$B^{(r)}(-\eta_k) = 2A |\eta_k| \sum_{i=1}^N \sum_{k'=1}^K B_2(\tau_i, +\eta_{k'}) \exp\left(-\frac{\tau_1 - \tau_i}{(+\eta_k)}\right) d^{(\tau)}(1, i', N) d^{(\eta)}(1, k', K), \quad (2.5.9)$$

а вместо (2.5.5) при учете соотношения (2.4.26) получаем вид

$$B^{(r)0}(-\eta_k) = 2\pi AS \eta_0 |\eta_k| \exp(-\tau_0 / \eta_0). \quad (2.5.10)$$

### Отражение теплового излучения

В принципе, для теплового излучения все необходимая информация уже приведена выше. Но для полноты изложения МПР соберем здесь ее воедино.

Особенности расчета поля теплового излучения определяются лишь иным видом начальной функции источников (раздел 2.3)  $B_1(\tau_i, \pm\eta_k) = (1 - \Lambda(\tau_i)) B_e(\lambda, T(\tau_i))$  (причем только для нулевой гармоники!), к которой на поверхности надо добавить собственное излучение  $B_1(\tau_i, -\eta_k) := B_1(\tau_i, -\eta_k) + \varepsilon_\lambda(\eta_k) B_e(\lambda, T_s)$ . Прямое излучение, которое требуется

специально учитывать на первой итерации цикла отражения, в случае теплового излучения вообще отсутствует. Подчеркнем: если “прямое” тепловое излучение вычисляется непосредственно (по алгоритмам раздела 1.4), а рассеянное тепловое – отдельно, то надо аккуратно суммировать собственное излучение и отражение поверхности в описанных выше алгоритмах. Конкретно: надо пропустить запись в искомую суммируемую функцию источников на нулевой итерации циклов рассеяния и отражения (см. также раздел 2.3). Иными словами, здесь нужен не формальный подход к вычислениям, а понимание, знание их физических основ. Помочь их формированию является целью данного пособия.

Если функция излучения поверхности  $\varepsilon_\lambda(\eta_k)$  лишена азимутальной зависимости (более чем стандартный случай!), то все ограничивается нулевой гармоникой. Действительно, даже если отражение от поверхности и дает азимутальную зависимость, она не сможет проявиться, т.к. все исходные функции источников для ненулевых гармоник будут равны нулю. Если же функция излучения поверхности все-таки имеет азимутальную зависимость, то ее следует разложить по азимутальным гармоникам и использовать в приведенных выше алгоритмах. Тогда для ненулевой гармоники начальная функция источников будет всюду нулевой, кроме поверхности.

Для стандартного случая изотропии излучения поверхности МПР для теплового излучения вообще элементарен (см. раздел 2.3). Отметим еще раз, что в ИК диапазоне, где преобладает тепловое излучение, при учете относительной малости вклада рассеянного излучения МПР может стать очень эффективным именно для этого диапазона длин волн, т.к. достаточно рассматривать лишь малые порядки рассеяния. А также МПР быть полезным для доказательства того, что рассеянием вообще можно пренебречь.



### 3. Методы сферических гармоник, дискретных ординат и сложения слоев

#### 3.1. Метод сферических гармоник

##### Особенности метода

Метод сферических гармоник (МСГ) имеет наиболее теоретический характер и, в некотором смысле, может считаться вершиной теории переноса излучения в плане ее приложения к конкретным прикладным вычислительным задачам оптики атмосферы. Это порождает частые утверждения о том, что МСГ – это самый “строгий”, “точный” и “эталонный” метод. Однако он основан на разложении по азимутальным гармоникам, что создает существенные проблемы искажения и несоответствия его результатов физической реальности, что подробно обсуждалось в разделе 2.2. Впрочем, среди всех методов, использующих азимутальные гармоники, именно в МСГ этот недостаток максимально нивелируется, поскольку собственно в решаемых уравнениях сильно осциллирующие функции отсутствуют.

МСГ может рассматриваться как определенное развитие и дополнение МПР, что в частности позволяет использовать преимущества МПР при учете отражения от поверхности. Например, МПР применим практически для любых типов отражения (см. разделы 2.4 и 2.5). В свою очередь, МСГ применим только для рассеянного солнечного излучения и не применим для теплового излучения. Применение МСГ для облачной (оптически толстой) атмосферы проблематично, т.к. потребует подробной сетки по оптическим глубинам, что резко увеличит время расчетов. Однако принципиальных причин не применять МСГ для облачности нет. Поэтому, учитывая мощности современных компьютеров, можно пытаться использовать МСГ и для облачной атмосферы.

Недостатками МСГ, помимо неприменимости для теплового излучения, является медленная работа по сравнению с другими численными методами, а также некоторые сложность и громоздкость его реализации. Впрочем, последнее утверждение – это скорее психологический барьер, который, как будет показано ниже, легко преодолим при правильном изложении технических деталей метода.

##### Разложение по сферическим гармоникам

В разделе 2.2 мы рассматривали разложение индикатрисы рассеяния, функций источников и интенсивности излучения по азимутальным гармоникам, что позволило исключить из уравнений переменную азимутальный угол. Сделаем следующий шаг: исключим и косинус зенитного угла, для чего представим искомую функцию источников в виде разложения по присоединенным функциям Лежандра, аналогично разложениям индикатрисы (2.2.8). А именно, положим, что

$$B^m(\tau, \eta) = \sum_{j=m}^M c_j^m(\tau) P_j^m(\eta) B_j^m(\tau), \quad (3.1.1)$$

где  $c_j^m(\tau) = x_j(\tau) \frac{(j-m)!}{(j+m)!}$ ,  $x_j(\tau)$  – коэффициенты разложения (2.2.3) для

индикатрисы рассеяния  $x(\tau, \chi)$ , а  $B_j^m(\tau)$  – сферические гармоники, т.е. новые подлежащие определению функции источников, которые имеют уже два индекса, но зато зависят только от одной переменной.

### Система уравнений для сферических гармоник функций источников

Подставим теперь ряд (3.1.1) и ряд для индикатрисы (2.2.8) в интегральное уравнение для функции источников рассеянного солнечного излучения (2.3.1) и приравняем коэффициенты при одинаковых индексах  $j$  и  $m$  у функций  $B_j^m(\tau)$ . Получаем систему интегральных уравнений

$$B_j^m(\tau) = \frac{\Lambda(\tau)}{2} \sum_{l=m}^M c_l^m(\tau) \left( \int_0^1 P_j^m(\eta') P_l^m(\eta') \frac{d\eta'}{\eta'} \int_0^\tau B_l^m(\tau') \exp\left(-\frac{\tau-\tau'}{\eta'}\right) d\tau' - \int_{-1}^0 P_j^m(\eta') P_l^m(\eta') \frac{d\eta'}{\eta'} \int_\tau^{\tau_0} B_l^m(\tau') \exp\left(-\frac{\tau-\tau'}{\eta'}\right) d\tau' \right) + \frac{\Lambda(\tau)S}{4} P_j^m(\eta_0) \exp(-\tau/\eta_0), \quad (3.1.2)$$

где  $m=0, \dots, M$ ,  $j=m, \dots, M$ .

Заметим, что в уравнения (3.1.2) присоединенные функции Лежандра входят в виде произведения  $P_j^m(\eta') P_l^m(\eta')$ , которое, по их определению (2.2.6), при учете (2.2.1), всегда является полиномом. Подсчитывая его степень, получим  $2m + (j-m) + (l-m) = j+l$ . Важно, что, хотя степень этого полинома не зависит от индекса  $m$ , его коэффициенты – зависят. Обозначим указанный полином как

$$q_{jl}^m(\eta') = \sum_{k=0}^{j+l} q_{jlk}^m(\eta')^k, \quad (3.1.3)$$

где сам полином определяется уже тремя индексами ( $j$ ,  $l$ ,  $m$ ), а его коэффициенты  $q_{jlk}^m$  – четыремя. Вопрос о конкретном вычислении коэффициентов полинома (3.1.3) вынесен в Приложение 7.

Теперь подставим (3.1.3) в (3.1.2), поменяем местами интегрирование по оптической глубине и косинусу угла, а затем выполним интегрирование по косинусу аналитически. В результате возникнут интегральные экспоненты  $E_n(x)$  (см. определение (1.4.1) и раздел 1.4). Окончательно получаем

$$B_j^m(\tau) = \frac{\Lambda(\tau)}{2} \sum_{l=m}^M c_l^m(\tau) \int_0^{\tau_0} B_l^m(\tau') \left( \sum_{k=0}^{j+l} q_{jlk}^m E_{k+1}(|\tau-\tau'|) \right) d\tau' + \frac{\Lambda(\tau)}{4} S P_j^m(\eta_0) \exp(-\tau/\eta_0). \quad (3.1.4)$$

Уравнения (3.1.4) образуют систему интегральных уравнений для нахождения функций  $B_j^m(\tau)$ ,  $m=0, \dots, M$ ,  $j=m, \dots, M$ . Но при этом искомая функция зависит теперь не от трех и даже не от двух, а лишь от одной переменной.

#### Идея МСГ

Теперь она очевидна. Надо для заданной дискретной вертикальной сетки параметров расписать и решить систему уравнений (3.1.4). После чего, подключив сетку косинусов зенитных углов, по формуле (3.1.1) найти азимутальные гармоники функции источников, а после этого уже действовать по различным вариантам схем предыдущей главы.

#### Дискретная матричная форма МСГ

В качестве входных данных имеем вертикальную сетку параметров  $\tau_i$ ,  $\Lambda(\tau_i)$ ,  $x_j(\tau_i)$ ,  $i=1, \dots, N$ , а также веса квадратурной формулы интегрирования

$d^{(\tau)}(i_1, i_2, i_3)$  (см. раздел 2.3). Переходя к дискретной форме в (3.1.4), вместо системы интегральных уравнений (3.1.4) получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$B_j^m(\tau_i) = \frac{\Lambda(\tau_i)}{2} \sum_{l=m}^M c_l^m(\tau_i) \sum_{n=1}^N B_l^m(\tau_n) \left( \sum_{k=0}^{j+l} q_{jkl}^m E_{k+1}(|\tau_i - \tau_n|) \right) d^{(\tau)}(1, n, N) + \frac{\Lambda(\tau_i)}{4} SP_j^m(\eta_0) \exp(-\tau_i/\eta_0), \quad (3.1.5)$$

$$i = 1, \dots, N, \quad m = 0, \dots, M, \quad j = m, \dots, M.$$

Естественным является переход для такой системы уравнений к матричной форме записи, в которой искомая функция источников теперь является вектором  $\mathbf{b}_i^m$  с элементами  $B_i^m(\tau_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . В (3.1.5) этот вектор умножается на матрицу  $\mathbf{T}_j^m$ , элементы которой имеют вид

$$T_{ji}^m(\tau_i, \tau_n) = \frac{\Lambda(\tau_i)}{2} c_l^m(\tau_i) d^{(\tau)}(1, n, N) \sum_{k=0}^{j+l} q_{jkl}^m E_{k+1}(|\tau_i - \tau_n|). \quad (3.1.6)$$

О вычислении интегральных экспонент сведения приводятся в Приложении 4. Отметим, что для экономии времени следует заранее вычислить весь набор интегральных экспонент для  $i = 1, \dots, N$ ,  $n = 1, \dots, N$ ,  $k = 0, \dots, 2M$  (т.к. имеется симметрия по индексам  $i$  и  $n$ ).

В матричной записи система уравнений (3.1.5) принимает вид

$$\mathbf{b}_j^m = \sum_{l=m}^M \mathbf{T}_j^m \mathbf{b}_l^m + \mathbf{t}_j^m, \quad (3.1.7)$$

где вектор свободного члена согласно (3.1.5) равен

$$t_j^m(\tau_i) = \frac{\Lambda(\tau_i)}{4} SP_j^m(\eta_0) \exp(-\tau_i/\eta_0). \quad (3.1.8)$$

О вычислении присоединенных функций Лежандра сведения даны в Приложении 6.

#### Схема алгоритма МСГ

Очевидно, что система уравнений (3.1.7) может решаться для каждой азимутальной гармоники отдельно. Поэтому организуется цикл по азимутальным гармоникам  $m = 0, \dots, M$ , и далее значение индекса  $m$  будет считаться заданным и фиксированным.

Обратим внимание, что для каждого  $m$  система уравнений (3.1.7) имеет вид “перевернутого треугольника”: при  $j = M$  в сумме остается одно слагаемое, при  $j = M - 1$  – два, причем во второе слагаемое входит тот же вектор, который уже был найден при  $j = M$  и т.д. Это позволяет для решения (3.1.7) системы использовать известный прием обратной прогонки.

Введем вспомогательные векторы для пересчета свободного члена системы  $\mathbf{t} \equiv t(\tau_i)$  и  $\mathbf{s} = s(\tau_i)$ . Запускаем цикл обратной рекурсии  $j = M, \dots, m$  (с уменьшением значения  $j$ ). Присвоим по (3.1.8) начальное значение вектору свободного члена  $t(\tau_i) = t_j^m(\tau_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Если  $j < M$ , то в цикле по  $l = j + 1, \dots, M$  последовательно вычисляем по выражению (3.1.6) матрицу  $\mathbf{T}_j^m$ . Затем вычисляем вектор  $\mathbf{s} = \mathbf{T}_j^m \mathbf{b}_l^m$  и присваиваем  $\mathbf{t} := \mathbf{t} + \mathbf{s}$  (где “:=” – это оператор присваивания, введенный в разделе 2.3). Отметим, что в (3.1.6)

коэффициенты  $q_{jkl}^m$  при желании можно непосредственно вычислять для фиксированного значения  $m$ , выдавая их в цикле по алгоритму из Приложения 7.

После вычисления по (3.1.6) матрицы  $\mathbf{t}_{jj}^m \equiv T_{jj}^m(\tau_i, \tau_n)$  (здесь  $l = j$ ) имеем уравнение

$$\mathbf{b}_j^m = \mathbf{t}_{jj}^m \mathbf{b}_j^m + \mathbf{t}, \quad (3.1.9)$$

которое есть не что иное, как матричная запись знакомого нам интегрального уравнения для искомой функции источников  $\mathbf{b}_j^m$ , подробно рассмотренного в главе 2. Схема его решения известна и использована в разделе 2.3 – это итерации по ряду Неймана:

$$\mathbf{b}_j^m = \mathbf{t} + \mathbf{t}_{jj}^m \mathbf{t} + (\mathbf{t}_{jj}^m)^2 \mathbf{t} + \dots \quad (3.1.10)$$

Казалось бы, при расчетах по (3.1.10) нет выигрыша по сравнению с МПР, т.к. снова возникает итерационный процесс. Но здесь переменная лишь одна и сумма при перемножении матрицы на вектор однократная, поэтому объем вычислений меньше примерно на два порядка. Кроме того, все вычисления сводятся к стандартным операциям с векторами и матрицами. Напишите, основываясь на материалах раздела 2.3, алгоритм итерационного суммирования (3.1.10) в качестве упражнения.

Решение уравнения (3.1.9) в виде ряда (3.1.10) следует признать безупречным. Но нередко с целью повысить скорость расчетов прибегают к другому варианту, а именно

$$\mathbf{b}_j^m = (\mathbf{1} - \mathbf{t}_{jj}^m)^{-1} \mathbf{t}, \quad (3.1.11)$$

где  $\mathbf{1}$  – единичная матрица (размера  $N \times N$ ), а операция “-1” означает обращение матрицы. Вариант (3.1.11) не столь безупречен по сравнению с (3.1.10), т.к. при обращении матрицы возможны серьезные вычислительные проблемы. Алгоритм обращения матрицы приведен в Приложении 8.

После нахождения вектора  $\mathbf{b}_j^m$  его, в принципе, можно сразу же суммировать в азимутальную гармонику с индексом  $m$  по (3.1.1) для заданной сетки косинусов углов. Но сохранять в памяти необходимо весь набор  $\mathbf{b}_j^m$  до окончания итерации по индексу  $m$ . После окончания итераций по  $j$  переходим на следующее значение индекса  $m$ . А после окончания итераций по  $m$  вычисления окончены, т.к. получены значения всех азимутальных гармоник (3.1.1) по МСГ.

### Особый случай

В выражении (3.1.6) при индексе  $k=0$  в матрице уравнения (3.1.9) возникает функция  $E_1(|\tau_i - \tau_n|)$ . Она обращается в бесконечность при нулевом значении аргумент (этому соответствует  $n=i$ ), что создает проблему при вычислениях.

Для ее преодоления заметим, что все численные методы решения прикладных задач неизбежно содержат вычислительные погрешности и, хуже того, возможно возникновение несоответствия между результатами расчетов и физической реальностью. Это позволяет нам обращаться с формулами значительно более вольно, чем теоретикам и математикам. Учтем, что все исходные параметры атмосферы, будучи физическими величинами, не могут быть известны абсолютно точно, т.к. они содержат погрешности. Это относится и к значениям объемных коэффициентов ослабления и даже к высотам, на

которых они заданы. Следовательно, сетка оптических глубин  $\tau_i$  тоже известна с погрешностью. Образно говоря, ее уровни  $\tau_i$  как бы размыты, нечетки. Учтем эту нечеткость в правой части интегрального уравнения, записывая там вместо величин  $E_1(|\tau_i - \tau_n|)$  функцию  $E_1(|\tau_i - \tau_n + \Delta|)$ , где  $\Delta$  – некоторая малая величина. Теперь нулевое значение аргумента интегральной экспоненты не возникает, следовательно, проблема обращения ее в бесконечность снимается.

Указанный прием встроен в методы вычисления интегральных экспонент, которые приведены в Приложении 4 (конкретно там  $\Delta = 0.0015$ ). То есть, если вычислять интегральные экспоненты именно по формулам Приложения 4, то о рассматриваемом особом случае можно и не вспоминать.

### **МСГ в рамках МПР, учет отражения от поверхности**

Как уже отмечалось выше, МСГ тесно связан с МПР и фактически может даже рассматриваться как модификация МПР, так как его итогом является вычисление азимутальных гармоник (3.1.1). Т.е. имеется та же цель, что и в МПР. Объединяя МПР и МГС, это позволяет использовать все возможности МПР для учета отражения от поверхности (см. раздел 2.5). То есть МСГ для МПР играет как бы роль неявного вычисления операторов переноса рассеянного излучения и позволяет сразу, без итераций, получать азимутальные гармоники функции источников.

При расчетах для случая освещения атмосферы снизу, для МСГ следует использовать прием “переворота атмосферы”, описанный в разделе 1.2. При этом значение косинуса  $\eta_0$  в (3.1.4)-(3.1.6) заменяется на косинус надирного угла отражения. Реальные вычисления необходимы для всего набора таких углов. Здесь можно существенно сэкономить время счета, если учесть, что изменение  $\eta_0$  затрагивает только свободный член системы уравнений (3.1.7). Таким образом, можно использовать схему МСГ одновременно для вычисления всего набора надирных углов (или зенитных углов для Солнца!). Напишите соответствующую модификацию схемы алгоритма МСГ в качестве упражнения.

В задачах нахождения интенсивностей на границах среды при изотропно отражающей поверхности после нахождения азимутальных гармоник по МСГ и расчета по ним интенсивностей излучения, для учета отражения удобно непосредственно использовать алгоритм из раздела 2.4.

Как показано в главе 2, для многих стандартных моделей отражения достаточен расчет при освещении снизу только для нулевой азимутальной гармоники. Здесь следует предупредить, что  $m=0$  не означает  $M=0$ , т.е. в системе уравнений (3.1.7) для нулевой азимутальной гармоники будет по-прежнему  $M$  уравнений и  $M$  неизвестных функций.

### **Неприменимость МСГ для теплового излучения**

МСГ не может быть применим для теплового излучения, поскольку в этом случае функция источников  $(1 - \Lambda(\tau))B_e(\lambda, T(\tau))$ , в отличие от солнечного излучения (3.1.2), не содержит ряда по присоединенным функциям Лежандра.

Приписать функции  $(1 - \Lambda(\tau))B_e(\lambda, T(\tau))$  как множитель единичную константу  $P_0(\eta)$  нельзя, поскольку присоединенные функции Лежандра не образуют ортогональную систему функций. Действительно, представление (3.1.1) – это не разложение функции источников в ортогональный ряд, а искусственный прием решения уравнения (2.3.1). Этот прием основан на том, что в его правой части подобные ряды уже имеются. В случае же с тепловым

излучением там одного такого ряда нет. Исключением является изотропное рассеяние, подробно изучаемое в классической теории переноса излучения. Но в атмосферах планет подобного рассеяния не бывает (см. раздел 2.2.)

При разложении по азимутальным гармоникам (2.2.9) учет теплового излучения возможен, т.к. там функции реально разлагаются в ортогональный ряд Фурье по косинусам, что допускает разложение и для константы (с единственным членом при  $m = 0$ ).

Напомним, что, как отмечено в главе 2, именно для теплового излучения может оказаться очень эффективным собственно МПР.

### **3.2. Метод дискретных ординат**

#### **Особенности метода**

Метод дискретных ординат (МДО) считается самым быстрым численным методом теории переноса излучения. Именно он используется в различных радиационных кодах [2], предназначенных для массовых, инженерных расчетов поля рассеянного излучения. МДО применим как для рассеянного солнечного, так и для теплового излучения. Более того, пожалуй, это единственный метод, эффективно работающий сразу для суммы указанных компонент излучения. В рамках МДО можно учесть все особенности отражения от поверхности. Он применим не только для изотропного, но практически для любого типа отражения.

Главным недостатком МДО является использование разложения по азимутальным гармоникам (см. раздел 2.2). Более того, именно МДО является наиболее чувствительным к указанной особенности, т.к. попытки учета в его рамках необходимого числа гармоник и количества узлов интегрирования по косинусу угла рассеяния соответственно увеличивают размерность решаемой системы уравнений. А это сводит на нет главное достоинство МДО – скорость вычислений. Указанное обстоятельство приводит к необходимости компромисса между скоростью расчетов и их адекватностью физической реальности. Заметим, что такой компромисс далеко не всегда достигается в указанных выше стандартных радиационных кодах, в которых преимущество отдается, конечно же, скорости вычислений. МДО формально применим для атмосфер любой оптической толщины. Но реально, из-за наличия в соотношениях экспонент от оптической глубины, его область применения для оптически толстых атмосфер ограничена (например, при наличии сильной облачности), т.к. требуется анализ точности и устойчивости решений в каждом конкретном случае. Третий существенный недостаток МДО состоит в том, что этот метод является чисто математическим. В отличие от всех других численных методов теории переноса его операциям нельзя приписать физический смысл. Вообще говоря, это затрудняет отладку алгоритмов и кодов МДО, анализ результатов вычислений и их сравнение с расчетами по другим методам.

В своем исходном “аналитическом” варианте МДО довольно сложен для понимания и, тем более, в реализации (МДО – не для “новичков”). Тем не менее, включить в учебное пособие аналитический вариант МДО, который является классикой численных методов теории переноса, необходимо. В данном разделе мы приступим именно к этой версии МДО. Более того, учитывая прикладной стиль пособия, изложим ее не схематично, но со всеми

вычислительными подробностями. А в следующем разделе укажем на значительно более легкий численный подход к МДО.

### Идея МДО

В основе МДО лежит рассмотрение исходного дифференциального уравнения для интенсивности излучения (2.2.10) и замены стоящего в его правой части интеграла квадратурной формулой (стандартно – Гаусса). Т.е. изначально осуществляется переход к дискретной сетке по косинусам зенитных углов, что и объясняет название метода.

### Система дифференциальных уравнений МДО

Для численного интегрирования введем непосредственно в уравнение (2.2.10) подробно обсуждавшуюся в разделе 2.3 косинусную сетку узлов  $\eta_k$ ,  $k=1, \dots, K$ . Это приводит к системе  $2K$  дифференциальных уравнений для функций  $I(\tau, \pm\eta_k)$ . Далее отдельно рассмотрим случаи  $\eta > 0$  и  $\eta < 0$ , переходя только к положительному диапазону косинусов сетки и вводя отдельные интенсивности  $I^{m(+)}(\tau, \eta_k) = I^m(\tau, +\eta_k)$  и  $I^{m(-)}(\tau, \eta_k) = I^m(\tau, -\eta_k)$ . На аналогичные части распадется и функция индикатрисы, для которой возникнут четыре компоненты:

$$p^{m(++)}(\tau, \eta_k, \eta_{k'}) = p^m(\tau, +\eta_k, +\eta_{k'}), \quad p^{m(+-)}(\tau, \eta_k, \eta_{k'}) = p^m(\tau, -\eta_k, \eta_{k'}), \\ p^{m(+)}(\tau, \eta_k, \eta_{k'}) = p^m(\tau, \eta_k, -\eta_{k'}), \quad p^{m(-)}(\tau, \eta_k, \eta_{k'}) = p^m(\tau, -\eta_k, -\eta_{k'}).$$

Но из соотношений симметрии (2.2.16) следует, что

$$p^{m(-)}(\tau, \eta_k, \eta_{k'}) = p^{m(++)}(\tau, \eta_k, \eta_{k'}), \quad p^{m(+)}(\tau, \eta_k, \eta_{k'}) = p^{m(+-)}(\tau, \eta_k, \eta_{k'}).$$

Тогда вводим окончательные обозначения

$$p^{m(+)}(\tau, \eta_k, \eta_{k'}) \equiv p^{m(++)}(\tau, \eta_k, \eta_{k'}) = p^{m(-)}(\tau, -\eta_k, -\eta_{k'})$$

и

$$p^{m(-)}(\tau, \eta_k, \eta_{k'}) \equiv p^{m(+-)}(\tau, \eta_k, \eta_{k'}) = p^{m(+)}(\tau, \eta_k, \eta_{k'}),$$

что приводит нас к системе дифференциальных уравнений

$$\eta_k \frac{dI^{m(+)}(\tau, \eta_k)}{d\tau} = -I^{m(+)}(\tau, \eta_k) + \frac{\Lambda(\tau)}{2} \sum_{k'=1}^K (p^{m(+)}(\tau, \eta_k, \eta_{k'}) I^{m(+)}(\tau, \eta_{k'}) + \\ + p^{m(-)}(\tau, \eta_k, \eta_{k'}) I^{m(-)}(\tau, \eta_{k'})) d^{(\eta)}(1, k', K) + \frac{\Lambda(\tau)}{4} S p^{m(+)}(\tau, \eta_k, \eta_0) \exp(-\tau/\eta_0), \\ \eta_k \frac{dI^{m(-)}(\tau, \eta_k)}{d\tau} = I^{m(-)}(\tau, \eta_k) - \frac{\Lambda(\tau)}{2} \sum_{k'=1}^K (p^{m(-)}(\tau, \eta_k, \eta_{k'}) I^{m(+)}(\tau, \eta_{k'}) + \\ + p^{m(+)}(\tau, \eta_k, \eta_{k'}) I^{m(-)}(\tau, \eta_{k'})) d^{(\eta)}(1, k', K) - \frac{\Lambda(\tau)}{4} S p^{m(-)}(\tau, \eta_k, \eta_0) \exp(-\tau/\eta_0), \quad (3.2.1)$$

где  $d^{(\eta)}(1, k', K)$  – веса квадратурной формулы интегрирования (см. раздел 2.3).

Запишем систему уравнений (3.2.1) в матричной форме

$$\frac{d\mathbf{I}^{m(+)}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{T}^{m(+)}(\tau) \mathbf{I}^{m(+)}(\tau) + \mathbf{T}^{m(-)}(\tau) \mathbf{I}^{m(-)}(\tau) + \mathbf{q}^{m(+)}(\tau), \\ \frac{d\mathbf{I}^{m(-)}(\tau)}{d\tau} = -\mathbf{T}^{m(-)}(\tau) \mathbf{I}^{m(+)}(\tau) - \mathbf{T}^{m(+)}(\tau) \mathbf{I}^{m(-)}(\tau) - \mathbf{q}^{m(-)}(\tau), \quad (3.2.2)$$

в которой искомыми векторами являются векторы  $\mathbf{I}^{m(+)}(\tau) \equiv I^{m(+)}(\tau, \eta_k)$ ,  $\mathbf{I}^{m(-)}(\tau) \equiv I^{m(-)}(\tau, \eta_k)$ . Элементы матриц в (3.2.2) для  $k=1, \dots, K$ ,  $k'=1, \dots, K$  имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{m(+)}(\tau) &\equiv T^{m(+)}(\tau, \eta_k, \eta_{k'}) = \frac{1}{\eta_k} \left( -\delta_{kk'} + \frac{\Lambda(\tau)}{2} p^{m(+)}(\tau, \eta_k, \eta_{k'}) d^{(\eta)}(1, k', K) \right), \\ \mathbf{T}^{m(-)}(\tau) &\equiv T^{m(-)}(\tau, \eta_k, \eta_{k'}) = \frac{\Lambda(\tau)}{2\eta_k} p^{m(-)}(\tau, \eta_k, \eta_{k'}) d^{(\eta)}(1, k', K), \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

где  $\delta_{kk'}$  – символ Кронекера ( $\delta_{kk'} = 1$  при  $k = k'$  и  $\delta_{kk'} = 0$  при  $k \neq k'$ ), а векторы свободных членов имеют следующее представление

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{m(+)}(\tau) &\equiv q^{m(+)}(\tau, \eta_k) = \frac{\Lambda(\tau)}{4\eta_k} Sp^{m(+)}(\tau, \eta_k, \eta_0) \exp(-\tau/\eta_0), \\ \mathbf{q}^{m(-)}(\tau) &\equiv q^{m(-)}(\tau, \eta_k) = \frac{\Lambda(\tau)}{4\eta_k} Sp^{m(-)}(\tau, \eta_k, \eta_0) \exp(-\tau/\eta_0). \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

### Общая схема МДО

Система уравнений (3.2.2) играет важную роль в теории переноса излучения. Это система линейных дифференциальных уравнений, математические методы решения которой хорошо известны: надо найти общее решение однородной системы, выражающееся через собственные числа и векторы ее матрицы, а потом прибавить к нему частное решение неоднородной системы, что сводится к линейным уравнениям для коэффициентов решения. Но при этом реальное решение системы (3.2.2) возможно лишь для постоянных (не зависящих от оптической глубины) параметров атмосферы. В важном для практических расчетов случае неоднородной атмосферы это не так. Выход состоит в том, чтобы использовать разбиение атмосферы на слои, решить задачу для каждого однородного слоя отдельно, а потом согласовать эти решения при учете граничных условий.

В итоге получаем следующую общую схему изложения МДО:

- 1) решение задачи для отдельного однородного слоя;
- 2) учет отражения от поверхности (самый нижний слой);
- 3) решение для всей атмосферы, т.е. согласование отдельных решений для слоев.

Поскольку для каждой азимутальной гармоники система уравнений (3.2.2) решается независимо, далее в формулах опускаем индекс  $m$ .

### Система уравнений МДО для оптически однородного слоя

Убираем в матрицах  $\mathbf{T}^{(\pm)}$  и векторах  $\mathbf{q}^{(\pm)}$  системы (3.2.2)-(3.2.4) зависимость от оптической глубины  $\tau$ , чтобы получить систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Задавая малые значения  $K$  (один или два), можно получить явные аналитические решения системы (3.2.2) (двухпотокное или четырехпотокное приближения). Этим решениям обычно отводится существенное место как в теории переноса, так и в рамках описания МДО. Однако, учитывая прикладной стиль нашего пособия, не будем останавливаться на этих довольно грубых приближениях, а перейдем сразу к общему случаю достаточно большого значения  $K$ , что необходимо в реальных расчетах (см. раздел 2.3). Впрочем, используя вычислительную схему общего случая, не так уж сложно получить указанные приближения. Рекомендуем читателю проделать соответствующие выкладки в качестве полезного упражнения для уяснения МДО.



### Общее решение однородной системы уравнений

Сложим и вычтем уравнения однородной (т.е. при  $\mathbf{q}^{(\pm)} \equiv 0$ ) системы (3.2.2), вследствие чего получаем систему линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}(\mathbf{I}^{(+)}(\tau) + \mathbf{I}^{(-)}(\tau)) &= (\mathbf{T}^{(+)} - \mathbf{T}^{(-)})(\mathbf{I}^{(+)}(\tau) - \mathbf{I}^{(-)}(\tau)), \\ \frac{d}{d\tau}(\mathbf{I}^{(+)}(\tau) - \mathbf{I}^{(-)}(\tau)) &= (\mathbf{T}^{(+)} + \mathbf{T}^{(-)})(\mathbf{I}^{(+)}(\tau) + \mathbf{I}^{(-)}(\tau)). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Для того чтобы провести симметризацию матрицы этой системы, перейдем в (3.2.5) к новым переменным

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{(+)}(\tau) &\equiv J_k^{(+)}(\tau) = \sqrt{\eta_k d(1, k, K)} (I^{(+)}(\tau) + I^{(-)}(\tau))_k, \\ \mathbf{J}^{(-)}(\tau) &\equiv J_k^{(-)}(\tau) = \sqrt{\eta_k d(1, k, K)} (I^{(+)}(\tau) - I^{(-)}(\tau))_k. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

В результате система уравнений (3.2.5) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \mathbf{J}^{(+)}(\tau) &= \mathbf{U}^{(-)} \mathbf{J}^{(-)}(\tau), \\ \frac{d}{d\tau} \mathbf{J}^{(-)}(\tau) &= \mathbf{U}^{(+)} \mathbf{J}^{(+)}(\tau), \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(+)} &\equiv U_{kk'}^{(+)} = -\frac{\delta_{kk'}}{\eta_k} + \frac{\Lambda}{2} \sqrt{\frac{d^{(\eta)}(1, k, K) d^{(\eta)}(1, k', K)}{\eta_k \eta_{k'}}} (p^{(+)}(\eta_k, \eta_{k'}) + p^{(-)}(\eta_k, \eta_{k'})), \\ \mathbf{U}^{(-)} &\equiv U_{kk'}^{(-)} = -\frac{\delta_{kk'}}{\eta_k} + \frac{\Lambda}{2} \sqrt{\frac{d^{(\eta)}(1, k, K) d^{(\eta)}(1, k', K)}{\eta_k \eta_{k'}}} (p^{(+)}(\eta_k, \eta_{k'}) - p^{(-)}(\eta_k, \eta_{k'})). \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Еще раз дифференцируя первое из уравнений (3.2.7) и подставляя в его правую часть второе из уравнений (3.2.7), имеем систему линейных дифференциальных уравнений уже 2-го порядка

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \mathbf{J}^{(+)}(\tau) = \mathbf{U}^{(-)} \mathbf{U}^{(+)} \mathbf{J}^{(+)}(\tau). \quad (3.2.9)$$

Как известно, для решения подобных систем линейных дифференциальных уравнений надо перейти к собственному базису матрицы системы, т.е. матрицы  $\mathbf{U}^{(-)} \mathbf{U}^{(+)}$ . Получаем преобразование координат  $\mathbf{J}^{(+)}(\tau) = \mathbf{\Omega} \mathbf{J}^{(+)}(\tau)$ , где  $\mathbf{\Omega}$  – матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы  $\mathbf{U}^{(-)} \mathbf{U}^{(+)}$ . Каждая из матриц  $\mathbf{U}^{(-)}$  и  $\mathbf{U}^{(+)}$  является симметричной, кроме того, их произведение  $\mathbf{U}^{(-)} \mathbf{U}^{(+)}$  тоже симметричная матрица (убедитесь в этом из формул (3.2.8)). Следовательно, все собственные числа матрицы  $\mathbf{U}^{(-)} \mathbf{U}^{(+)}$  являются вещественными числами. Тогда в новых координатах (“со штрихами”) система уравнений (3.2.9) распадается на независимые дифференциальные уравнения по каждому индексу  $k = 1, \dots, K$ :

$$\frac{d^2}{d\tau^2} J^{(+)}(\tau)_k = \omega_k J^{(+)}(\tau)_k, \quad (3.2.10)$$

где  $\omega_k$  – собственное число, соответствующее индексу  $k$  (собственному вектору с номером  $k$  – номеру столбца в матрице  $\mathbf{\Omega}$ ).

Решение уравнения (3.2.10) хорошо известно:

$$\mathbf{J}^{(+)\prime}(\tau)_k = w_k^{(+)} \exp(\sqrt{\omega_k} \tau) + w_k^{(-)} \exp(-\sqrt{\omega_k} \tau), \quad (3.2.11)$$

где  $w_k^{(+)}$ ,  $w_k^{(-)}$  – неопределенные константы интегрирования. Для их нахождения необходимо использовать граничные условия. Неотрицательность собственных чисел  $\omega_k$  легко доказывается подстановкой (3.2.11) в первое из уравнений (3.2.7) – оно обязано остаться вещественным. Теперь надо вернуться обратно к исходным переменным с помощью преобразования  $\mathbf{J}^{(+)}(\tau) = \Omega^{-1} \mathbf{J}^{(+)\prime}(\tau)$ . Матрица собственных векторов ортогональная, поэтому для нее обратная матрица равна транспонированной:  $\Omega^{-1} = \Omega^*$  (здесь индексом “\*” обозначается операция транспонирования). Окончательно получаем:  $\mathbf{J}^{(+)}(\tau) = \Omega^* \mathbf{J}^{(+)\prime}(\tau)$  и

$$\mathbf{J}^{(+)}(\tau) = \Omega^* ((\mathbf{w}^{(+)} \exp(\sqrt{\omega} \tau)) + (\mathbf{w}^{(-)} \exp(-\sqrt{\omega} \tau))), \quad (3.2.12)$$

где  $\omega$  – вектор собственных чисел,  $\mathbf{w}^{(+)}$ ,  $\mathbf{w}^{(-)}$  – векторы неопределенных констант. Решение системы из  $2K$  линейных дифференциальных уравнений первого порядка содержит  $2K$  таких констант. В скобках в правой части (3.2.12) стоят символически записанные векторы, компоненты которых определены как  $(\mathbf{w}^{(\pm)} \exp(\pm\sqrt{\omega} \tau))_k \equiv w_k^{(\pm)} \exp(\pm\sqrt{\omega_k} \tau)$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Аналогичную общую запись элементов покомпонентных функций от векторов договоримся использовать и далее.

Теперь подставим решение (3.2.12) в первое уравнение системы (3.2.7) и получим

$$\mathbf{J}^{(-)}(\tau) = (\mathbf{U}^{(-)})^{-1} \Omega^* ((\mathbf{w}^{(+)} \sqrt{\omega} \exp(\sqrt{\omega} \tau)) - (\mathbf{w}^{(-)} \sqrt{\omega} \exp(-\sqrt{\omega} \tau))). \quad (3.2.13)$$

После возвращения в (3.2.12) и (3.2.13) к переменным  $(\mathbf{I}^{(+)}(\tau) + \mathbf{I}^{(-)}(\tau))$  и  $(\mathbf{I}^{(+)}(\tau) - \mathbf{I}^{(-)}(\tau))$  по формулам (3.2.6) нужно сложить и вычесть старые переменные, после чего получаем искомое общее решение однородной системы

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{(+)}(\tau) &= \mathbf{G}^{(+)} (\mathbf{w}^{(+)} \exp(\sqrt{\omega} \tau)) + \mathbf{G}^{(-)} (\mathbf{w}^{(-)} \exp(-\sqrt{\omega} \tau)), \\ \mathbf{I}^{(-)}(\tau) &= \mathbf{G}^{(-)} (\mathbf{w}^{(+)} \exp(\sqrt{\omega} \tau)) + \mathbf{G}^{(+)} (\mathbf{w}^{(-)} \exp(-\sqrt{\omega} \tau)), \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{(+)} &= \frac{1}{2} \mathbf{D} \left( \frac{1}{\sqrt{\eta d^{(n)}}} \right) \left( \Omega^* + (\mathbf{U}^{(-)})^{-1} \Omega^* \mathbf{D}(\sqrt{\omega}) \right), \\ \mathbf{G}^{(-)} &= \frac{1}{2} \mathbf{D} \left( \frac{1}{\sqrt{\eta d^{(n)}}} \right) \left( \Omega^* - (\mathbf{U}^{(-)})^{-1} \Omega^* \mathbf{D}(\sqrt{\omega}) \right). \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

В (3.2.15) и далее в качестве  $\mathbf{D}(x)$  обозначена диагональная матрица, на диагонали которой стоят значения  $x_k$ . Поясним действие такой матрицы. При умножении диагональной матрицы на матрицу слева нужно на  $x_k$  умножить строки последней, т.е. в матрице (3.2.15) каждая строка с номером  $k$  матрицы  $(\Omega^* - (\mathbf{U}^{(-)})^{-1} \Omega^* \mathbf{D}(\sqrt{\omega}))$  умножается на  $\frac{1}{\sqrt{\eta_k d^{(n)}(1, k, K)}}$ . А при умножении справа

умножаются столбцы, т.е. в (3.2.15) каждый столбец с номером  $k$  матрицы  $\Omega^*$  умножается на  $\sqrt{\omega_k}$ .

### Вычисления в рамках общего решения однородной системы

Резюмируя вышесказанное, для заданного индекса азимутальной гармоники и номера слоя атмосферы в этом блоке МДО нужно выполнить следующие действия:

1) учитывая симметрию (см. Приложение 8), вычислить матрицы (размера  $K \times K$ )  $\mathbf{U}^{(+)}$  и  $\mathbf{U}^{(-)}$  по формулам (3.2.8);

2) вычислить их произведение – симметричную матрицу  $\mathbf{U}^{(-)}\mathbf{U}^{(+)}$ ;

3) найти собственные числа и векторы матрицы  $\mathbf{U}^{(-)}\mathbf{U}^{(+)}$ , т.е. вектор собственных чисел  $\omega$  и матрицу, столбцами которой являются соответствующие им собственные векторы  $\Omega$ . Алгоритм вычисления собственных чисел и векторов симметричной матрицы приводится в Приложении 8;

4) вычислить матрицу, обратную к  $\mathbf{U}^{(-)}$  (см. Приложение 8);

5) вычислить матрицы  $\mathbf{G}^{(+)}$  и  $\mathbf{G}^{(-)}$  по формулам (3.2.15).

### Частное решение неоднородной системы уравнений

Здесь имеет смысл отдельно рассматривать случаи солнечного и теплового излучения.

Солнечное излучение. Поскольку свободный член системы (3.2.4) содержит экспоненциальную зависимость от оптической глубины  $\tau$ , очевидно, частное решение обязано содержать ту же экспоненту. Следовательно, его надо искать в виде линейной комбинации

$$I^{(\pm)}(\tau, \eta_k) = Z_0^{(\pm)}(\eta_k) \exp(-\tau/\eta_0). \quad (3.2.16)$$

Для того чтобы идти уже проторенным путем, вновь перейдем к симметричным переменным по (3.2.6) и будем искать частное решение как

$$\mathbf{J}^{(\pm)}(\tau) = \mathbf{Z}_1^{(\pm)} \exp(-\tau/\eta_0). \quad (3.2.17)$$

Подстановка (3.2.17) в (3.2.7) с учетом свободного члена (3.2.2) дает

$$-\frac{1}{\eta_0} \mathbf{Z}_1^{(\pm)} = \mathbf{U}^{(\mp)} \mathbf{Z}_1^{(\mp)} + \mathbf{q}_0^{(\mp)}, \quad (3.2.18)$$

где

$$\mathbf{q}_0^{(\pm)} \equiv (q_0^{(\pm)})_k = \frac{\Lambda S}{4} \sqrt{\frac{d(1, k, K)}{\eta_k}} (p^{(+)}(\eta_k, \eta_0) \pm p^{(-)}(\eta_k, \eta_0)). \quad (3.2.19)$$

Из (3.2.18) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1^{(+)} &= \left( \eta_0 \mathbf{U}^{(-)} \mathbf{U}^{(+)} - \frac{1}{\eta_0} \mathbf{1} \right)^{-1} (\mathbf{q}_0^{(-)} - \eta_0 \mathbf{U}^{(-)} \mathbf{q}_0^{(+)}), \\ \mathbf{Z}_1^{(-)} &= -\eta_0 (\mathbf{U}^{(+)} \mathbf{Z}_1^{(+)} + \mathbf{q}_0^{(+)}), \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

где  $\mathbf{1}$  – единичная матрица. Возвращаясь к исходным интенсивностям, окончательно имеем

$$(\mathbf{Z}_0^{(\pm)})_k = \frac{1}{2\sqrt{\eta_k d(1, k, K)}} (\mathbf{Z}_1^{(+)} \pm \mathbf{Z}_1^{(-)})_k. \quad (3.2.21)$$

Итак, для получения частного решения для случая освещения атмосферы Солнцем нужно выполнить следующие действия:

1) вычислить по (3.2.19) векторы  $\mathbf{q}_0^{(\pm)}$ ;

2) вычислить по (3.2.20) векторы  $\mathbf{Z}_1^{(\pm)}$  – алгоритм обращения матрицы (она вновь симметричная!) приводится в Приложении 8;

3) пересчитать векторы  $\mathbf{Z}_0^{(\pm)}$  по (3.2.21).

Тепловое излучение. Для него свободный член системы уравнений (3.2.2) имеет вид  $(1-\Lambda)B_e(\lambda, T(\tau))$  и, напомним, действует только на нулевую гармонику. Чтобы получить его зависимость от  $\tau$ , надо предложить определенную аппроксимацию, простейшей из которых является аппроксимация линейная функцией. Итак, полагаем

$$q(\tau) = (1-\Lambda)(b_0 + b_1\tau) = q_0 + q_1\tau, \quad (3.2.22)$$

где функция (3.2.22) не зависит от направлений  $\eta_k$  и  $b_1 \neq 0$  (то есть слой выбран так, чтобы в нем менялась температура). Задавая функцию Планка на границах рассматриваемого слоя – нижней  $\tau_{dn}$  и верхней  $\tau_{up}$ , получаем для коэффициентов в (3.2.22) выражения

$$b_1 = \frac{B_e(\lambda, T(\tau_{up})) - B_e(\lambda, T(\tau_{dn}))}{\tau_{up} - \tau_{dn}},$$

$$b_0 = \frac{B_e(\lambda, T(\tau_{dn}))\tau_{up} - B_e(\lambda, T(\tau_{up}))\tau_{dn}}{\tau_{up} - \tau_{dn}}. \quad (3.2.23)$$

Теперь ищем частное решение системы (3.2.2) со свободным членом (3.2.22) в виде

$$I^{(\pm)}(\tau, \eta_k) = Y_0^{(\pm)}(\eta_k) + Y_1^{(\pm)}(\eta_k)\tau, \quad (3.2.24)$$

то есть

$$\mathbf{J}^{(\pm)}(\tau) = \mathbf{Y}_2^{(\pm)} + \mathbf{Y}_3^{(\pm)}\tau. \quad (3.2.25)$$

Переводя (3.2.7) в неоднородную систему, с учетом сложения и вычитания свободных членов (3.2.22) исходной системы (3.2.2) и их преобразования по (3.2.6)  $q_2 + q_3\tau = \sqrt{\eta d^{(n)}}(q_0 + q_1\tau)$ , получаем

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{J}^{(+)}(\tau) = \mathbf{U}^{(-)}\mathbf{J}^{(-)}(\tau),$$

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{J}^{(-)}(\tau) = \mathbf{U}^{(+)}\mathbf{J}^{(+)}(\tau) + 2(q_2 + q_3\tau)\mathbf{1}, \quad (3.2.26)$$

где  $\mathbf{1}$  – единичный вектор. Подстановка (2.2.25) в (3.2.26) сразу дает

$$\mathbf{Y}_3^{(-)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Y}_3^{(+)} = -2q_3(\mathbf{U}^{(+)}\mathbf{U}^{(+)-1})\mathbf{1},$$

$$\mathbf{Y}_2^{(-)} = (\mathbf{U}^{(-)})^{-1}\mathbf{Y}_3^{(+)}, \quad \mathbf{Y}_2^{(+)} = -2q_2(\mathbf{U}^{(+)}\mathbf{U}^{(+)-1})\mathbf{1}. \quad (3.2.27)$$

Возвращаясь к исходным переменным, окончательно получаем

$$\mathbf{Y}_1^{(+)} = \mathbf{Y}_1^{(-)} = -(1-\Lambda)b_1\mathbf{D}\left(\frac{1}{\sqrt{\eta d^{(n)}}}\right)(\mathbf{U}^{(+)}\mathbf{U}^{(+)-1})\mathbf{D}(\sqrt{\eta d^{(n)}})\mathbf{1},$$

$$\mathbf{Y}_0^{(\pm)} = \mathbf{D}\left(\frac{1}{\sqrt{\eta d^{(n)}}}\right)\left(\pm(\mathbf{U}^{(-)})^{-1}\mathbf{D}(\sqrt{\eta d^{(n)}})\mathbf{Y}_1^{(+)} - (1-\Lambda)b_0(\mathbf{U}^{(+)}\mathbf{U}^{(+)-1})\mathbf{D}(\sqrt{\eta d^{(n)}})\mathbf{1}\right). \quad (3.2.28)$$

Резюмируем. Для случая теплового излучения (для нулевой азимутальной гармоники) надо выполнить следующие действия:

1) вычислить по (3.2.23) константы  $b_0$  и  $b_1$ ;

2) вычислить матрицу, обратную симметричной  $\mathbf{U}^{(+)}$  (см. Приложение 8);

3) вычислить по (3.2.28) векторы  $\mathbf{Y}_0^{(\pm)}$  и  $\mathbf{Y}_1^{(\pm)}$ .

### Решение системы дифференциальных уравнений МДО

Складывая (3.2.14), (3.2.16) и (3.2.24), теперь мы можем записать искомое аналитическое (!!)-решение для интенсивности рассеянного излучения:

$$\mathbf{I}^{(\pm)}(\tau) = \mathbf{G}^{(\pm)}(\mathbf{w}^{(+)} \exp(\sqrt{\omega\tau}) + \mathbf{G}^{(\mp)}(\mathbf{w}^{(-)} \exp(-\sqrt{\omega\tau})) + \mathbf{Z}_0^{(\pm)} \exp(-\tau/\eta_0) + \mathbf{Y}_0^{(\pm)} + \mathbf{Y}_1^{(\pm)}\tau. \quad (3.2.29)$$

Третье слагаемое в правой части (3.2.29) добавляется для солнечного излучения, а четвертое и пятое – для теплового. Как видно из (3.2.29), МДО оказывается способным без проблем работать и для их суммы (т.е. при необходимости учитывать и солнечное, и тепловое излучение на заданной длине волны).

Последнее, что нам осталась в рамках МДО, – это найти векторы неопределенных коэффициентов  $\mathbf{w}^{(\pm)}$  в (3.2.29). Для этого, как уже отмечалось, необходимо привлечь граничные условия. В интересующем нас общем случае оптически неоднородной атмосферы их надо записать для каждого отдельного слоя, а затем объединить их все вместе. Эта работа окажется не такой уж и сложной, если предварительно к ней подготовиться. Приступим к изложению заявленной программы.

### Граничные условия на поверхности – учет отражения и собственного излучения

Поскольку уравнения МДО написаны для интенсивности излучения, в качестве характеристики отражающей поверхности, должен быть задан двунаправленный коэффициент отражения (2.4.1), точнее, коэффициенты его разложения по азимутальным гармоникам (2.4.6). Опустим фиксированный индекс азимутальной гармоники  $m$  и перейдем к дискретной сетке косинусов углов МДО, тогда получаем матрицу  $\mathbf{r} \equiv r(-\eta_k, \eta_{k'})$ ,  $k = 1, \dots, K$ ,  $k' = 1, \dots, K$ . Переписав через векторы и матрицы соотношение для интенсивности отраженного излучения (2.4.7), получаем

$$\mathbf{I}^{(-)}(\tau_0) = 2\pi\mathbf{I}^{(+)}(\tau_0). \quad (3.2.30)$$

Соотношение (3.2.30) и есть граничное условие на поверхности.

Для солнечного излучения надо также учитывать прямое, падающее на поверхность излучение (см. раздел 2.4). Следовательно, для вектора  $\mathbf{I}(\tau_0)$  в правую часть (3.2.29) надо добавить еще и вектор с элементами  $2\pi r(-\eta_k, \eta_0)I_0(\eta_0)$ , где  $I_0(\eta_0)$  вычисляется по (2.4.24).

Для стандартных моделей идеального изотропного и зеркального отражений соответствующие готовые формулы пересчета интенсивности падающего излучения в отраженное излучение уже приведены в разделе 2.4. Это соотношения (2.4.8) и (2.4.9). Напомним, что для этих моделей отражение учитывается только в нулевой азимутальной гармонике.

Для теплового излучения необходимый учет собственного излучения поверхности приведет к прибавлению для  $\mathbf{I}(\tau_0)$  в правую часть (3.2.29) слагаемого  $\varepsilon_\lambda^m(\eta_k)B_e(\lambda, T_s)$ , где  $T_s$  – температура поверхности, а  $\varepsilon_\lambda^m(\eta_k)$  – соответствующая азимутальная гармоника в разложении излучательной способности поверхности. Если собственное излучение поверхности не имеет азимутальной зависимости, то, как уже отмечалось в гл.2, для теплового

излучения нулевая гармоника является единственной. Отметим, что если для теплового излучения учитываются ненулевые гармоники, то для них в (3.2.29)  $\mathbf{Y}_0^{(\pm)} = \mathbf{Y}_1^{(\pm)} \equiv \mathbf{0}$ .

### Граничные условия для слоев

Теперь переходим к оптически неоднородной атмосфере с вертикальной сеткой узлов  $\tau_i$ ,  $i=1, \dots, N$ . Такая модель содержит  $N-1$  слой, оптические параметры каждого из которых в МДО считаются постоянными (т.е. не зависят от  $\tau$ ).

Для нижней границы атмосферы (у нас это  $i=1$ ) граничные условия (3.2.30) уже сформулированы выше. Для верхней границы атмосферы ( $i=N$ ) имеем отсутствие приходящего рассеянного излучения:

$$\mathbf{I}^{(+)}(\tau_N) = \mathbf{0}. \quad (3.2.31)$$

Рассмотрим границу между двумя слоями  $\tau_i$ , причем пока считаем  $i \neq 1$  и  $i \neq N$ . Очевидно, восходящая и нисходящая интенсивности на ней должны быть одинаковыми, что приводит к требованию выполнения равенства

$$\mathbf{I}_i^{(\pm)}(\tau_i) = \mathbf{I}_{i-1}^{(\pm)}(\tau_i), \quad (3.2.32)$$

где  $\mathbf{I}_{i-1}^{(\pm)}(\tau)$  – интенсивность излучения (3.2.29) для слоя с нижней границей  $\tau_{i-1}$ , т.е. от  $\tau_{i-1}$  до  $\tau_i$  (он ниже границы), а  $\mathbf{I}_i^{(\pm)}(\tau)$  – интенсивность излучения (3.2.29) для слоя от  $\tau_i$  до  $\tau_{i+1}$  (он выше границы).

### Система уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов

Теперь рассматриваем всю атмосферу с вертикальной сеткой узлов  $\tau_i$ ,  $i=1, \dots, N$  и введем во все матрицы и векторы соотношений (3.2.29) индекс номера слоя  $i$ . В результате по (3.2.30)-(3.2.32) получаем систему уравнений для нахождения векторов неопределенных коэффициентов  $\mathbf{w}_i^{(\pm)}$ , причем здесь  $i=1, \dots, N-1$ . Для удобства дальнейшей работы и анализа эту систему сначала следует написать в развернутом виде:

$$\begin{aligned} & \mathbf{G}_1^{(-)}(\mathbf{w}_1^{(+)} \exp(\sqrt{\omega_1} \tau_1)) + \mathbf{G}_1^{(+)}(\mathbf{w}_1^{(-)} \exp(-\sqrt{\omega_1} \tau_1)) + \mathbf{Z}_{0,1}^{(-)} \exp(-\tau_1 / \eta_0) + \\ & + \mathbf{Y}_{0,1}^{(-)} + \mathbf{Y}_{1,1}^{(-)} \tau_1 + 2\pi^2 S \eta_0 \exp(-\tau_1 / \eta_0) \mathbf{r}(\eta_0) + (\varepsilon_\lambda) B_e(\lambda, T_s) = \\ & = \mathbf{r}(\mathbf{G}_1^{(+)}(\mathbf{w}_1^{(+)} \exp(\sqrt{\omega_1} \tau_1)) + \mathbf{G}_1^{(-)}(\mathbf{w}_1^{(-)} \exp(-\sqrt{\omega_1} \tau_1)) + \mathbf{Z}_{0,1}^{(+)} \exp(-\tau_1 / \eta_0) + \\ & + \mathbf{Y}_{0,1}^{(+)} + \mathbf{Y}_{1,1}^{(+)} \tau_1), \text{ для } i=1; \\ & \mathbf{G}_i^{(\pm)}(\mathbf{w}_i^{(\pm)} \exp(\pm \sqrt{\omega_i} \tau_i)) + \mathbf{G}_i^{(\mp)}(\mathbf{w}_i^{(\mp)} \exp(\mp \sqrt{\omega_i} \tau_i)) + \mathbf{Z}_{0,i}^{(\pm)} \exp(-\tau_i / \eta_0) + \mathbf{Y}_{0,i}^{(\pm)} + \\ & + \mathbf{Y}_{1,i}^{(\pm)} \tau_i = \mathbf{G}_{i-1}^{(\pm)}(\mathbf{w}_{i-1}^{(+)} \exp(\sqrt{\omega_{i-1}} \tau_i)) + \mathbf{G}_{i-1}^{(\mp)}(\mathbf{w}_{i-1}^{(-)} \exp(-\sqrt{\omega_{i-1}} \tau_i)) + \\ & + \mathbf{Z}_{0,i-1}^{(\pm)} \exp(-\tau_i / \eta_0) + \mathbf{Y}_{0,i-1}^{(\pm)} + \mathbf{Y}_{1,i-1}^{(\pm)} \tau_i, \text{ для } 1 < i < N-1; \\ & \mathbf{G}_{N-1}^{(+)}(\mathbf{w}_{N-1}^{(+)} \exp(\sqrt{\omega_{N-1}} \tau_N)) + \mathbf{G}_{N-1}^{(-)}(\mathbf{w}_{N-1}^{(-)} \exp(-\sqrt{\omega_{N-1}} \tau_N)) + \\ & + \mathbf{Z}_{0,N-1}^{(+)} \exp(-\tau_N / \eta_0) + \mathbf{Y}_{0,N-1}^{(+)} + \mathbf{Y}_{1,N-1}^{(+)} \tau_N = \mathbf{0}, \text{ для } i=N-1. \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

В первом из уравнений (3.2.33) величины в двух последних слагаемых левой части имеют вид  $\mathbf{r}(\eta_0)_k \equiv r(-\eta_k, \eta_0)$  и  $(\varepsilon_\lambda)_k \equiv \varepsilon_\lambda(\eta_k)$ . А в последнем из них подразумевается, что  $\tau_N = 0$ , но мы не стали подставлять это значение ради единообразия формул. Это будет сделано ниже. В системе (3.2.33) имеется

$1+2(N-2)+1=2(N-1)$  уравнений для определения необходимых  $2(N-1)$  неизвестных векторов  $\mathbf{w}_i^{(\pm)}$ ,  $i=1, \dots, N-1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1^{(+)} \mathbf{w}_1^{(+)} + \mathbf{S}_1^{(-)} \mathbf{w}_1^{(-)} &= \mathbf{t}_1, \\ \mathbf{S}_{i-1}^{(++)} \mathbf{w}_{i-1}^{(+)} + \mathbf{S}_{i-1}^{(+-)} \mathbf{w}_{i-1}^{(-)} + \mathbf{S}_i^{(++)} \mathbf{w}_i^{(+)} + \mathbf{S}_i^{(+-)} \mathbf{w}_i^{(-)} &= \mathbf{t}_i^{(+)}, \quad 1 < i < N, \\ \mathbf{S}_{i-1}^{(-+)} \mathbf{w}_{i-1}^{(+)} + \mathbf{S}_{i-1}^{(--)} \mathbf{w}_{i-1}^{(-)} + \mathbf{S}_i^{(-+)} \mathbf{w}_i^{(+)} + \mathbf{S}_i^{(--)} \mathbf{w}_i^{(-)} &= \mathbf{t}_i^{(-)}, \quad 1 < i < N, \\ \mathbf{S}_N^{(+)} \mathbf{w}_{N-1}^{(+)} + \mathbf{S}_N^{(-)} \mathbf{w}_{N-1}^{(-)} &= \mathbf{t}_N, \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1^{(\pm)} &= (\mathbf{G}_1^{(\mp)} - \mathbf{r} \mathbf{G}_1^{(\pm)}) \mathbf{D}(\exp(\pm \sqrt{\omega_1} \tau_1)), \\ \mathbf{t}_1 &= \mathbf{r}(\mathbf{Z}_{0,1}^{(+)} \exp(-\tau_1/\eta_0) + \mathbf{Y}_{0,1}^{(+)} + \mathbf{Y}_{1,1}^{(+)} \tau_1) - \mathbf{Z}_{0,1}^{(-)} \exp(-\tau_1/\eta_0) - \mathbf{Y}_{0,1}^{(-)} - \mathbf{Y}_{1,1}^{(-)} \tau_1 - \\ &\quad - 2\pi^2 S \eta_0 \exp(-\tau_1/\eta_0) \mathbf{r}(\eta_0) - (\varepsilon_\lambda) B_e(\lambda, T_s), \\ \mathbf{S}_{i-1}^{(++)} &= -\mathbf{G}_{i-1}^{(+)} \mathbf{D}(\exp(\sqrt{\omega_{i-1}} \tau_i)), & \mathbf{S}_{i-1}^{(+-)} &= -\mathbf{G}_{i-1}^{(-)} \mathbf{D}(\exp(-\sqrt{\omega_{i-1}} \tau_i)), \\ \mathbf{S}_{i-1}^{(-+)} &= -\mathbf{G}_{i-1}^{(-)} \mathbf{D}(\exp(\sqrt{\omega_{i-1}} \tau_i)), & \mathbf{S}_{i-1}^{(--)} &= -\mathbf{G}_{i-1}^{(+)} \mathbf{D}(\exp(-\sqrt{\omega_{i-1}} \tau_i)), \\ \mathbf{S}_i^{(++)} &= \mathbf{G}_i^{(+)} \mathbf{D}(\exp(\sqrt{\omega_i} \tau_i)), & \mathbf{S}_i^{(+-)} &= \mathbf{G}_i^{(-)} \mathbf{D}(\exp(-\sqrt{\omega_{i-1}} \tau_i)), \\ \mathbf{S}_{i-1}^{(-+)} &= \mathbf{G}_i^{(-)} \mathbf{D}(\exp(\sqrt{\omega_i} \tau_i)), & \mathbf{S}_{i-1}^{(--)} &= \mathbf{G}_i^{(+)} \mathbf{D}(\exp(-\sqrt{\omega_{i-1}} \tau_i)), \\ \mathbf{t}_i^{(\pm)} &= (\mathbf{Z}_{0,i-1}^{(\pm)} - \mathbf{Z}_{0,i}^{(\pm)}) \exp(-\tau_i/\eta_0) + \mathbf{Y}_{0,i-1}^{(\pm)} - \mathbf{Y}_{0,i}^{(\pm)} + (\mathbf{Y}_{1,i-1}^{(\pm)} - \mathbf{Y}_{1,i}^{(\pm)}) \tau_i, \\ \mathbf{S}_N^{(\pm)} &= \mathbf{G}_{N-1}^{(\pm)}, \quad \mathbf{t}_N = -\mathbf{Z}_{0,N-1}^{(+)} - \mathbf{Y}_{0,N-1}^{(+)}. \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

Метод решения системы уравнений (3.2.34) вынесен в Приложение 9.

#### Общая схема алгоритма МДО

В качестве заключения этого достаточно громоздкого изложения приведем общую схему алгоритма расчета интенсивности излучения по МДО.

1) Разбиваем атмосферу на  $N$  оптически однородных слоев с сеткой по оптической глубине  $\tau_i$ ,  $i=1, \dots, N$ . Поскольку в МДО объем вычислений прямо пропорционален  $N$ , их количество желательно минимизировать. Для этого разумно переходить от исходной сетки высот в модели атмосферы к внутренней сетке интегрирования (см. раздел 1.3) с возможным объединением соседних слоев с близкими оптическими свойствами. Здесь стандартным приемом является вычисление альbedo однократного рассеяния и индикатрис как средневзвешенных с учетом оптических толщин складываемых слоев. Напишите формулы в качестве упражнения.

2) Цикл по азимутальным гармоникам. Для каждой из них задаем свою сетку по косинусу угла рассеяния  $\eta_k$ ,  $k=1, \dots, K$ . В общем случае значение  $K$  может быть различным для разных слоев в атмосфере (см. раздел 2.3). Все упоминаемые ниже векторы имеют размерность  $K$ , а матрицы имеют размерность  $K \times K$ .

3) Для каждой гармоники в каждом слое атмосферы с номером  $i$ ,  $i=1, \dots, N-1$  независимо и последовательно вычисляем: матрицы  $\mathbf{G}_i^{(\pm)}$ , векторы собственных чисел  $\omega_i$ , вектор  $\mathbf{Z}_{0,i}^{(\pm)}$  для случая, если учитывается солнечное излучение, векторы  $\mathbf{Y}_{0,i}^{(\pm)}$ ,  $\mathbf{Y}_{1,i}^{(\pm)}$  для случая, если учитывается тепловое излучение.

4) Для совокупности всех слоев вычисляем матрицы и векторы коэффициентов системы уравнений (3.2.34) и (3.2.35). Заметим, что в них

учитывается взаимодействие излучения с поверхностью. Решаем систему уравнений (3.2.34) (см. Приложение 9) и получаем векторы  $\mathbf{w}_i^{(\pm)}$ .

5) Имеем аналитическое выражение для интенсивности излучения (3.2.29) с учетом индекса каждого слоя для данной азимутальной гармоники.

6) После завершения цикла по азимутальным гармоникам складываем решения вида (3.2.29) для каждой гармоники согласно разложениям (2.2.9) и получаем искомую интенсивность. В нем зависимость от оптической глубины и азимута является аналитической, а для произвольных значений косинуса зенитного угла стандартно рекомендуется использовать интерполяцию по сетке дискретных ординат  $\eta_k$ .

### **3.3. Упрощенный вариант метода дискретных ординат – метод конечных разностей**

#### **Вычислительные проблемы аналитического варианта МДО**

Помимо математической сложности, с которой мы столкнулись в предыдущем разделе, классический аналитический вариант МДО обладает и другими, достаточно серьезными недостатками.

При произвольных значениях  $K$  аналитический подход требует нахождения собственных чисел и векторов матрицы системы уравнений (3.2.2), что само по себе непростая задача (см. замечания об этом в Приложении 8). В случае неоднородной атмосферы систему уравнений приходится решать для каждого высотного слоя отдельно, а потом согласовывать коэффициенты на границах слоев, решая систему линейных векторных уравнений. Все это для практических вычислительных задач слишком сложно, громоздко и неэффективно, особенно в важном на практике случае необходимости рассматривать достаточно большие значения  $K$  (см. раздел 2.3). К тому же, операция нахождения собственных чисел и векторов матрицы сама по себе является существенным источником вычислительной погрешности. А если значения собственных чисел оказываются близкими, то все системы линейных уравнений, решаемых в МДО, становятся плохо обусловленными (с близким к нулю определителем матрицы системы). Это создаст новые трудности при расчетах и приведет к лавинообразному росту погрешности вычислений. Как уже отмечалось выше, изящные теоретические решения в общем случае нередко таят в себе “подводные камни”, существенно затрудняющие их численную реализацию.

Поэтому укажем в этом разделе способ отказаться от аналитического решения дифференциальных уравнений (3.2.2) и рассмотрим вариант МДО с их численным решением. Поскольку указанный вариант сводится к стандартному математическому приему перехода в дифференциальных уравнениях к сетке конечных разностей, этот подход называют методом конечных разностей. Принимаем эту терминологию и будем использовать для такого метода аббревиатуру МКР.

#### **Идея численного МДО – МКР**

Распишем систему уравнений (3.2.2) для заданной сетки оптических глубин  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , а операцию дифференцирования интенсивности выполним численно.



### Численное дифференцирование

Пусть некая функция  $f(x)$  задана в виде таблицы  $f_i(x_i)$ ,  $i=1, \dots, N$ .

Требуется при таком задании функции найти ее производную  $\frac{d}{dx} f_i(x_i)$ .

Соответствующие формулы строятся в виде отношения конечных разностей функции и аргумента и хорошо известны. В сущности, простейшие из них можно получать путем “обращения” формул численного интегрирования (прямоугольников, трапеций и т.п.). Поскольку для вертикального интегрирования мы конкретно используем формулу трапеций, уместно воспользоваться и соответствующей ей формулой численного дифференцирования:

$$\frac{d}{dx} f_i(x_i) = \begin{cases} \frac{-3f_i(x_i) + 4f_{i+1}(x_{i+1}) - f_{i+2}(x_{i+2})}{x_{i+2} - x_i}, & \text{если } i = 1 \\ \frac{f_{i+1}(x_{i+1}) - f_{i-1}(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}}, & \text{если } 1 < i < N \\ \frac{f_{i-2}(x_{i-2}) - 4f_{i-1}(x_{i-1}) + 3f_i(x_i)}{x_i - x_{i-2}}, & \text{если } i = N \end{cases} \quad (3.3.1)$$

При  $1 < i < N$  значения (3.3.1) в точности соответствуют формуле трапеций, а для значений производной на краях интервала введены специальные коэффициенты, уменьшающие погрешность численного дифференцирования.

Для  $N = 2$  имеем элементарное соотношение

$$\frac{d}{dx} f_1(x_1) = \frac{d}{dx} f_2(x_2) = \frac{f_2(x_2) - f_1(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Будем трактовать таблицу  $f_i(x_i)$  как вектор  $\mathbf{f}$  из  $N$  компонент. Тогда операция дифференцирования соответствует его умножению на некоторую матрицу  $\frac{d}{dx} \mathbf{f} = \mathbf{Df}$ . В частности, для соотношений (3.3.1) матрица дифференцирования имеет вид

$$\mathbf{D} \equiv D_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{x_3 - x_1} & \frac{4}{x_3 - x_1} & \frac{-1}{x_3 - x_1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-1}{x_3 - x_1} & 0 & \frac{1}{x_3 - x_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{-1}{x_4 - x_2} & 0 & \frac{1}{x_4 - x_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{-1}{x_N - x_{N-2}} & 0 & \frac{1}{x_N - x_{N-2}} \\ 0 & \dots & \dots & \frac{1}{x_N - x_{N-2}} & \frac{-4}{x_N - x_{N-2}} & \frac{3}{x_N - x_{N-2}} \end{pmatrix}. \quad (3.3.2)$$

Это так называемая трехдиагональная матрица, общий элемент которой, за исключением особых первой и последней строки, а также тривиального случая

$N=2$ , определяется для  $i=2,\dots,N-1$  как  $D_{ij} = \frac{-1}{x_{i+1} - x_{i-1}}$ , если  $j=i-1$ ;

$D_{ij} = \frac{1}{x_{i+1} - x_{i-1}}$ , если  $j=i+1$ ;  $D_{ij} = 0$  для всех прочих значений  $j$  от 1 до  $N$ .

### Численное решение уравнений МДО – МКР

Введем в систему дифференциальных уравнений МДО (3.2.2) зависимость от оптической глубины для уровней  $\tau_i$ ,  $i=1,\dots,N$ . Тогда все величины при фиксированном индексе  $i$  станут векторами размерности  $K$  и матрицами размерности  $K \times K$ . Припишем указанным векторам и матрицам индексы  $i$  и, по предыдущей договоренности, опустим номер азимутальной гармоники  $m$ , поскольку решение ищется для каждой гармоники независимо. Для решения системы надо рассмотреть совокупный вектор  $\mathbf{I}^{(\pm)}(\tau_i)$  из  $2K \times N$  элементов. Соответствующую размерность имеют совокупная матрица системы и ее свободный член. Но все указанные объекты будут иметь блочную структуру, т.к. состоят из векторов и матриц размерностей  $K$  и  $K \times K$ . Изобразим соответствующую систему линейных алгебраических уравнений как блочную уже в виде ее решения через операцию обращения матрицы:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_1^{(+)} \\ \mathbf{I}_2^{(+)} \\ \dots \\ \mathbf{I}_N^{(+)} \\ \mathbf{I}_1^{(-)} \\ \mathbf{I}_2^{(-)} \\ \dots \\ \mathbf{I}_N^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11} - \mathbf{T}_1^{(+)} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{31} & \dots & & -\mathbf{T}_1^{(-)} & \dots \\ \mathbf{D}_{21} & & -\mathbf{T}_2^{(+)} & \mathbf{D}_{23} & \dots & & -\mathbf{T}_2^{(-)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & & \mathbf{D}_{N,N-2} & \mathbf{D}_{N,N-1} & \mathbf{D}_{NN} - \mathbf{T}_N^{(+)} & \dots & -\mathbf{T}_N^{(-)} \\ \mathbf{T}_1^{(-)} & \dots & & \mathbf{D}_{11} + \mathbf{T}_1^{(+)} & \mathbf{D}_{12} & \mathbf{D}_{13} & & \\ \dots & \mathbf{T}_2^{(-)} & \dots & & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{T}_2^{(+)} & \mathbf{D}_{23} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & & \mathbf{T}_N^{(-)} & \dots & & \mathbf{D}_{N,N-2} & \mathbf{D}_{N,N-1} & \mathbf{D}_{NN} + \mathbf{T}_N^{(+)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1^{(+)} \\ \mathbf{q}_2^{(+)} \\ \dots \\ \mathbf{q}_N^{(+)} \\ -\mathbf{q}_1^{(-)} \\ -\mathbf{q}_2^{(-)} \\ \dots \\ -\mathbf{q}_N^{(-)} \end{pmatrix}. \quad (3.3.3)$$

Укажем, что каждый элемент в векторах выражения (3.3.3) является вектором из  $K$  элементов при соответствующем значении  $\tau_i$ ; каждый элемент (клетка) в матрице выражения (3.3.3) – это матрица размера  $K \times K$  для соответствующего значения  $\tau_i$ , причем матрицы  $\mathbf{D}_{ij}$  – это диагональные матрицы, на диагонали которых стоят значения  $D_{ij}$  из (3.3.2) (с заменой переменной на  $\tau$ ). Таким образом, совокупная матрица системы МДО сохраняет (в блочном виде) трехдиагональную структуру и, кроме того, имеет две отдельные диагональные последовательности матриц  $\mathbf{T}_i^{(-)}$ . Все прочие ее блоки – нулевые. Расписать формально блоки совокупной матрицы в зависимости от значений индексов  $i=1,\dots,2N$ ,  $j=1,\dots,2N$  по выражению (3.3.3) не составляет труда. Предоставляем это сделать читателю в качестве упражнения.

Таким образом, задача решения уравнений МДО свелась к вычислению по (3.2.3), (3.2.4) и (3.2.6) элементов матрицы (3.3.3), ее обращению (см. Приложение 8), и умножению на вектор. То есть к стандартным элементарным операциям. Размер подлежащей обращению матрицы  $2K \times N$ , что немало. Но даже при предельных реальных ситуациях его значения порядка тысяч.

Обратить матрицу подобного размера не представляет проблемы для современных компьютеров и не занимает большого времени счета. Также отметим, что скорость вычислений обратной матрицы можно существенно повысить при учете того, что большая часть элементов исходной матрицы равны нулю. Достаточно в операциях алгоритма из Приложения 8 анализировать значение текущего элемента матрицы и в случае его равенства нулю не производить (пропускать в циклах) операции умножения с ним.

#### **Учет отражения от поверхности в МКР**

В сущности, здесь все аналогично аналитическому МДО (см. раздел 3.2). Отражение определяется соответствующей матрицей азимутальных гармоник  $\mathbf{r} \equiv r(-\eta_k, \eta_{k'})$ ,  $k=1, \dots, K$ ,  $k'=1, \dots, K$ , представляющей двунаправленный коэффициент отражения, и соотношением (3.2.30). Следовательно, для учета отражения в рамках МКР достаточно просто прибавить матрицу  $2\pi\mathbf{r}$  к блоку с индексами  $N+1, 1$  совокупной матрицы системы (3.3.3). Первый столбец строки с номером  $N+1$  там уже присутствует (это  $\mathbf{T}_1^{(-)}$ ), т.к. уровню поверхности у нас соответствует  $i=1$ . Соотношения интенсивностей отраженного падающего излучения в случае стандартных моделей идеального изотропного и зеркального отражения и их связь с матрицей  $\mathbf{r}$  (для нулевой гармоники только!) приведены в разделе 2.4 (соотношения (2.4.8) и (2.4.9)).

Учет отражения прямого солнечного излучения в численном МДО-МКР также сводится к тому, чтобы к вектору  $\mathbf{q}_1^{(-)}$  (общий индекс  $N+1$  в свободном члене (3.3.3)) прибавлять векторы с элементами  $2\pi^2 S \eta_0 \exp(-\tau_1/\eta_0) \mathbf{r}(\eta_0)$ , где  $\mathbf{r}(\eta_0)_k \equiv r(-\eta_k, \eta_0)$ .

Впрочем, для задач, где требуется только расчет интенсивности излучения на границах атмосферы, а поверхность идеально изотропная, в рамках МКР часто используют специальный алгоритм учета отражения, описанный в разделе 2.4 (см. соотношения (2.4.27)). Это удобно, поскольку МКР автоматически выдает требуемые в указанном алгоритме интенсивности сразу для всех косинусов углов.

#### **Численный МДО - МКР для теплового излучения**

Для задач рассеяния теплового излучения в рамках МКР необходимо всего лишь заменить свободный член системы уравнений (3.2.4) на  $q^{0(+)}(\tau, \eta_k) = q^{0(-)}(\tau, \eta_k) = (1 - \Lambda(\tau)) B_e(\lambda, T(\tau))$  для нулевой азимутальной гармоники, а для ненулевых гармоник он становится равным нулю. Учет собственного излучения поверхности приведет к прибавлению к  $q^{m(-)}(\tau_0)$  (вектор с общим индексом  $N+1$  свободного члена (3.3.3)) слагаемого  $\varepsilon_\lambda^m(\eta_k) B_e(\lambda, T_s)$ , где  $T_s$  – температура поверхности, а  $\varepsilon_\lambda^m(\eta_k)$  – соответствующая азимутальная гармоника в разложении излучательной способности поверхности. Если собственное излучение не имеет азимутальной зависимости, то, как уже отмечалось в гл.2, для теплового излучения нулевая гармоника является единственной.

Таким образом, для теплового излучения надо заменить в системе уравнений (3.3.3) столбец векторов свободного члена на столбец векторов  $(\mathbf{q}_i^{\pm})_k = (1 - \Lambda(\tau_i)) B_e(\lambda, T(\tau_i))$  (при всех  $k=1, \dots, K$ ) для нулевой гармоники и на нули – для ненулевых гармоник. В последнем случае в правой части системы (3.3.3) ненулевым останется лишь вектор  $q_k^{m(-)}(\tau_0) = \varepsilon_\lambda^m(\eta_k) B_e(\lambda, T_s)$ .

Отражение теплового излучения в МКР учитывается, как было описано выше, за исключением, разумеется, прибавления прямого. Как уже отмечалось в разделе 3.2, МДО – МКР без проблем позволяет работать с суммарным (солнечное плюс тепловое) излучением. В этом случае указанные векторы для гармоник теплового излучения достаточно сложить в правой части системы (3.3.3) с уже стоящими там векторами для солнечного. В этом плане существенным достоинством МКР (которого нет у аналитического МДО!) является возможность использования одной обратной матрицы (3.3.3) для различных свободных членов системы. Т.е. достаточно вычислить ее один раз, а дальнейшие связанные задачи (например, расчеты для различных значений  $\eta_0$ , расчеты с добавлением теплового излучения и т.п.) решаются просто умножением матрицы на вектор.

#### **Особенности алгоритма МКР**

Общая логика алгоритма МКР остается той же, что и у МДО (см. заключение раздела 3.2). Только вместо операций 3), 4) и 5) туда нужно вставить численное решение системы (3.3.3). В результате утрачивается аналитическая зависимость интенсивности от оптической глубины и превращается в табличную, по которой в дальнейшем можно использовать интерполяцию.

### **3.4. Метод сложения слоев**

#### **Особенности метода**

Метод сложения слоев (МСС) в отличие от всех прочих рассматриваемых методов наиболее часто применяется для частной задачи расчета интенсивности рассеянного солнечного излучения, выходящего через верхнюю и нижнюю границы атмосферы. Однако, как отмечалось в разделе 2.4, именно эта задача возникает в подавляющем большинстве случаев необходимости расчета поля солнечного излучения (например, моделирование измерений на земной поверхности или из космоса).

Основным достоинством МСС является полное отсутствие ограничений на оптическую толщину атмосферы. Это единственный (среди рассматриваемых в данном пособии) метод, который без проблем может применяться для облачной атмосферы. В качестве прочих достоинств МСС можно указать на простоту его реализации (не требует решения уравнений), а также физическую наглядность. МСС является хорошим учебным методом, позволяющим уяснить процесс формирования поля рассеянного излучения.

К недостаткам МСС помимо отмеченных выше ограничений (неприменимость для излучения внутри атмосферы и теплового излучения) следует отнести использование разложения по азимутальным гармоникам (см. раздел 2.2), а также отсутствие привязки к отражению от поверхности. Т.е. МСС работает только для рассеяния (т.е. поглощение излучения отсутствует), а для учета отражения от поверхности его следует сопрягать с другими методами, в частности, с МПР. Впрочем, для случая идеального изотропного отражения МСС непосредственно выдает все необходимые данные для расчетов по алгоритму раздела 2.4, поэтому именно для указанного случая он, как правило, и применяется (еще одно неявное ограничение МСС).

#### **Идея МСС**

В основе МСС лежит возможность получить аналитическое решение для задачи расчета поля рассеянного излучения в слое малой оптической толщины

(в приближении однократного рассеяния). Далее оказывается возможным получить явные аналитические выражения в случае присоединения (т.е. прибавления) такого оптически тонкого слоя к слою произвольной оптической толщины, если для последнего известны интенсивности излучения, выходящие через его границы. Таким образом, начав с двух оптически тонких слоев, можно объединять (“складывать”) слои, пересчитывая интенсивности излучения на их границах. Продолжая процедуру сложения, так можно получить интенсивности излучения на границах слоя заданной оптической толщины (т.е. всей атмосферы), причем значение последней ничем формально не ограничено и появляется возможность применения МСС для облачного случая.

### Исходные формулы МСС

Вывод формул МСС подробно описан в [2], где приведена фактически и схема его алгоритма. Повторять здесь этот вывод мы не будем. Тем не менее, изложение МСС, как отмечено выше, бессмысленно без комментариев с физической точки зрения. Учитывая прикладной, практический стиль данного пособия (чем в [2]), поступим следующим образом. Приведем полный набор формул для алгоритма МСС, записав их для дискретной сетки по косинусам углов  $\eta_k$ ,  $k=1, \dots, K$  с весами квадратурной формулы  $d^{(n)}(k_1, k_2, k_3)$  (см. раздел 2.3), и через интенсивности (без ввода как в [2] коэффициентов яркости). При этом изложим формулы с необходимыми рассуждениями об их физическом смысле. Полученные формулы будут несколько отличаться от приведенных в [2]. Это делается специально, чтобы указать на определенный произвол математического формализма МСС. Сразу отметим, что поскольку МСС использует разложение по азимутальным гармоникам (раздел 2.2), вычисления для каждой из них проводятся независимо от других, поэтому индекс азимутальной гармоники  $m$  в формулах опускаем.

### Приближение однократного рассеяния

В МСС используется приближение однократного рассеяния (см. раздел 2.1). Поэтому сначала получим явные формулы для этого приближения. Подставляя в выражения для интенсивности (2.2.14) соотношение для функции источников (2.2.13), в котором оставлено только второе слагаемое,

получаем  $I(\tau, \eta) = \left| \frac{S}{4\eta} \int_{\tau}^0 \Lambda(\tau') p(\tau', \eta, \eta_0) \exp\left(-\left|\frac{\tau - \tau'}{\eta} + \frac{\tau'}{\eta_0}\right|\right) d\tau' \right|$ , если  $\eta > 0$ ,

$$I(\tau, \eta) = \left| \frac{S}{4\eta} \int_{\tau}^{\tau_0} \Lambda(\tau') p(\tau', \eta, \eta_0) \exp\left(-\left|\frac{\tau - \tau'}{\eta} + \frac{\tau'}{\eta_0}\right|\right) d\tau' \right|, \text{ если } \eta < 0. \quad (3.4.1)$$

### Приближение однократного рассеяния для оптически однородного слоя

Пусть теперь альбеда однократного рассеяния и функция индикатрисы не зависят от оптической глубины  $\tau$ . Тогда интегралы от экспонент в (3.4.1) вычисляются аналитически, и после элементарных преобразований, которые рекомендуем проделать читателю (см. также [2]), мы

получаем  $I(\tau, \eta) = \frac{\Lambda}{4} S \eta_0 p(\eta, \eta_0) \frac{\exp(-\tau/\eta_0) - \exp(-\tau/\eta)}{\eta_0 - \eta}$ , если  $\eta > 0$ ,

$$I(\tau, \eta) = \frac{\Lambda}{4} S \eta_0 p(\eta, \eta_0) \frac{\exp(-\tau/\eta_0) - \exp(-(\tau - \tau_0)/\eta - \tau_0/\eta_0)}{\eta_0 - \eta}, \text{ если } \eta < 0. \quad (3.4.2)$$

В первой из формул (3.4.2) надо учесть особый случай  $\eta = \eta_0$ , для которого непосредственно из (3.4.1) следует  $I(\tau, \eta_0) = \frac{\Lambda}{4} S \eta_0 p(\eta_0, \eta_0) \tau \exp(-\tau / \eta_0)$ .

### Оптически тонкий слой в МСС

Теперь в рамках МСС переходим к тонкому оптически однородному слою толщиной  $\Delta\tau$ , а также к дискретной сетке по косинусам углов  $\eta_k$ ,  $k = 1, \dots, K$  (напомним, что  $\eta_k > 0$ ). Запишем при учете соотношений (3.4.2) интенсивности излучения на верхней и нижней границах тонкого слоя, причем для того, чтобы подчеркнуть последнее обстоятельство, используем для интенсивности букву “ $i$ ”. Имеем

$$\begin{aligned} i(0, -\eta_k) &= \frac{\Lambda}{4} S \eta_0 p(-\eta_k, \eta_0) \frac{1 - \exp(-\Delta\tau(1/\eta_k + 1/\eta_0))}{\eta_0 + \eta_k}, \\ i(\Delta\tau, \eta_k) &= \frac{\Lambda}{4} S \eta_0 p(\eta_k, \eta_0) \frac{\exp(-\Delta\tau/\eta_0) - \exp(-\Delta\tau/\eta_k)}{\eta_0 - \eta_k}, \text{ если } \eta_k \neq \eta_0, \\ i(\Delta\tau, \eta_k) &= \frac{\Lambda}{4} S \eta_0 p(\eta_k, \eta_0) \Delta\tau \exp(-\Delta\tau/\eta_0), \text{ если } \eta_k = \eta_0. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

### Диффузное освещение

Помимо полученных соотношений (3.4.3) для перехода непосредственно к сложению слоев нам потребуется решить еще две вспомогательные задачи.

Пусть мы вычислили интенсивность рассеянного солнечного излучения  $I(\tau, \eta)$  для произвольных значений  $\tau$  и  $\eta$ . Она получена при освещении с направления  $\eta_0$ . Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, внесем этот косинус в список аргументов:  $I(\tau, \eta, \eta_0)$ . Рассмотрим теперь освещение со всех сторон, т.е. диффузное освещение, когда интенсивность излучения на верхней границе является функцией  $I_0(\eta_0)$ . Пересчитать интенсивность  $I(\tau, \eta)$  при таком освещении достаточно просто. Надо рассмотреть интенсивность  $I(\tau, \eta, \eta_0)$  из каждого конкретного направления  $\eta_0$ . При этом надо учесть, что поток  $\pi S$  в таком случае численно равен интенсивности, т.е.  $\pi S(\eta_0) = I_0(\eta_0)$ . И в итоге надо “собрать” интенсивности (энергию!) излучения от каждого направления, т.е. проинтегрировать по  $\eta_0$ .

Однако при этом надо учесть следующие три “тонких момента”. Во-первых, не надо забывать интеграл по азимуту. Дело в том, что хотя наши интенсивности (азимутальные гармоники) от азимута не зависят, но, как направление в пространстве, азимут никуда не исчез. Вследствие чего получим множитель  $2\pi$ . Во-вторых, интенсивность  $I(\tau, \eta, \eta_0)$  была получена для определенного “старого” значения  $S$ , теперь при подстановке в качестве множителя “нового”  $S(\eta_0) = I_0(\eta_0)/\pi$  существенно лишь отношение между ними ( $S(\eta_0)/S$ ), поэтому  $I(\tau, \eta, \eta_0)$  надо предварительно разделить на “старое”  $S$ . В-третьих, при формулировке задачи переноса излучения (раздел 2.1) мы исключили прямое излучение, но теперь оно будет присутствовать в любом направлении при  $\eta_0 = \eta$ . Следовательно, при  $\eta > 0$  его надо отдельно добавить к интегралу (с ослаблением по закону Бугера). В результате получаем

$$I(\tau, \eta) = \frac{2}{S} \int_0^1 I_0(\eta') I(\tau, \eta, \eta') d\eta' + \delta(\eta) I_0(\eta) \exp(-\tau/\eta), \quad (3.4.4)$$

где  $\delta(\eta) = 1$ , если  $\eta > 0$  и  $\delta(\eta) = 0$ , если  $\eta < 0$ . В формуле (3.4.4) следовало бы ввести разные обозначения для интенсивности при диффузном освещении  $I(\tau, \eta)$  и интенсивности при освещении только с одного направления  $I(\tau, \eta, \eta')$ , но мы договоримся различать их по месту в формуле (вне и под интегралом).

#### Освещение снизу

В МСС нам потребуется рассматривать освещение слоев не только сверху, но и снизу. Следуя обозначениям раздела 2.4, все величины для этого случая так же обозначим “волной” сверху, т.е.  $\tilde{I}(\tau, \eta)$ , и т.п. В вычислительном плане задача нахождения интенсивности при освещении снизу решается “переворотом атмосферы” с заменой зенитных углов надирными (см. разделы 1.2 и 2.4). Последнее обстоятельство очень удобно при рассуждениях, например, формула (3.4.4) для освещения снизу в результате указанной замены полностью сохранит свою структуру.

Отметим, что для тонкого однородного слоя по (3.4.3) при освещении снизу с одного направления с учетом “переворота” имеем

$$\tilde{i}(0, -\eta, -\eta_0) = i(\Delta\tau, \eta, \eta_0), \quad \tilde{i}(\Delta\tau, \eta, -\eta_0) = i(0, -\eta, \eta_0). \quad (3.4.5)$$

#### Сложение слоев – взаимное влияние

Итак, приступим к сложению слоев. Пусть имеется слой оптической толщины  $\tau$ , для которого при переходе к дискретной сетке по косинусам углов известны следующие четыре интенсивности: на верхней и нижней границах при освещении сверху с одного направления с косинусом зенитного угла  $\eta_l$  ( $l = 1, \dots, K$ ):  $I(0, -\eta_k, \eta_l)$  и  $I(\tau, \eta_k, \eta_l)$ , а также на верхней и нижней границах при освещении снизу с одного направления с косинусом зенитного угла  $-\eta_l$ :  $\tilde{I}(0, -\eta_k, -\eta_l)$  и  $\tilde{I}(\tau, \eta_k, -\eta_l)$ . Добавим к указанному слою снизу тонкий слой оптической толщиной  $\Delta\tau$ , рассеяние в котором считается однократным. Поэтому аналогичные четыре выходящие из слоя интенсивности определяются соотношениями (3.4.3) и (3.4.5).

Найдем интенсивность излучения, выходящего из нижнего (т.е. второго) слоя в верхний (т.е. первый). Нижний слой по-прежнему освещен сверху прямым излучением, однако теперь оно проходит сквозь верхний слой. Следовательно, это излучение ослабевает по закону Бугера, т.е. для него вместо  $S$  надо брать  $S \exp(-\tau/\eta_l)$ . Еще надо учесть, что нижний слой освещен сверху диффузным излучением первого слоя  $I(\tau, \eta_k, \eta_l)$ . Тут важно заметить, что влияние нижнего слоя не может изменить интенсивность указанного диффузного излучения, т.к. по условию в МСС рассеяние излучения в нижнем слое считается однократным. Действительно, если бы мы учли это влияние, то получился бы вклад в рассеянное излучение в нижнем слое за счет изменения диффузного излучения сверху, уже однократно рассеянного в нижнем же слое. То есть рассеяние окажется кратности выше единицы, чего быть не должно. В МСС в этом и состоит смысл прибавления снизу к слою любой оптической толщины  $\tau$  именно оптически тонкого слоя  $\Delta\tau$  с однократным рассеянием. Поэтому с учетом (3.4.4) искомая интенсивность излучения из нижнего слоя в верхний имеет вид

$$I_{21}(\tau, -\eta_k, \eta_l) = i(0, -\eta_k, \eta_l) \exp(-\tau/\eta_l) +$$

$$+ \frac{2}{S} \sum_{j=1}^K I(\tau, \eta_j, \eta_l) i(0, -\eta_k, \eta_j) d^{(n)}(1, j, K). \quad (3.4.6)$$

Поясним, что в отличие от формального соотношения (3.4.4) и аналогичных формул в [2], здесь мы расписываем конкретные дискретные соотношения, в которых требуется набор обоих индексов. Поэтому в формулах (3.4.6) и далее оба индекса  $k$  и  $l$  меняются во всем диапазоне ( $k=1, \dots, K$ ,  $l=1, \dots, K$ ), а для переменной интегрирования необходимо использовать еще один индекс ( $j$ ). При этом в аналоге  $I_0(\eta_0)$  из (3.4.4) он стоит “не на своем месте”, потому что это есть выходящая из слоя интенсивность диффузного излучения для всего набора косинусов углов, но при жестко фиксированном направлении освещения этого слоя  $\eta_l$ .

Теперь найдем аналогичную интенсивность излучения, выходящего из второго (нижнего) слоя в первый, но уже при освещении снизу. Второй слой освещен снизу прямым излучением без ослабления, а сверху освещен диффузным излучением первого слоя с интенсивностью  $\tilde{I}(\tau, \eta_k, -\eta_l)$ , ослабленной по закону Бугера при прохождении слоя  $\Delta\tau$ . Поэтому с учетом (3.4.4) и (3.4.5) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{21}(\tau, -\eta_k, -\eta_l) &= i(\Delta\tau, \eta_k, \eta_l) + \\ &+ \frac{2}{S} \exp(-\Delta\tau / \eta_l) \sum_{j=1}^K \tilde{I}(\tau, \eta_j, -\eta_l) i(0, -\eta_k, \eta_j) d^{(n)}(1, j, K). \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Найдем интенсивность излучения, выходящего из верхнего слоя в нижний слой при освещении сверху. Верхний слой освещен сверху непосредственно и вдобавок освещен снизу диффузно излучением с интенсивностью (3.4.6), что приводит к виду

$$I_{12}(\tau, \eta_k, \eta_l) = I(\tau, \eta_k, \eta_l) + \frac{2}{S} \sum_{j=1}^K I_{21}(\tau, -\eta_j, \eta_l) \tilde{I}(\tau, \eta_k, -\eta_j) d^{(n)}(1, j, K). \quad (3.4.8)$$

Наконец, найдем аналогичную интенсивность излучения из верхнего слоя в нижний при освещении снизу. Здесь учитываем ослабление прямого излучения снизу при прохождении второго слоя и диффузное излучение (3.4.7), вследствие чего получаем выражение

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{12}(\tau, \eta_k, -\eta_l) &= \tilde{I}(\tau, \eta_k, -\eta_l) \exp(-\Delta\tau / \eta_l) + \\ &+ \frac{2}{S} \sum_{j=1}^K \tilde{I}_{21}(\tau, -\eta_j, -\eta_l) \tilde{I}(\tau, \eta_k, -\eta_j) d^{(n)}(1, j, K). \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

#### Сложение слоев – объединение

Используя интенсивности на границе слоев (3.4.6)-(3.4.9), находим теперь интенсивности излучения, выходящего уже из объединенного слоя оптической толщины  $\tau + \Delta\tau$ .

Интенсивность излучения, выходящего через нижнюю границу при освещении сверху, будет суммой интенсивностей при освещении с одного направления от каждого слоя с учетом ослабления и интенсивности второго слоя при освещении диффузным излучением (3.4.8):

$$\begin{aligned} I(\tau + \Delta\tau, \eta_k, \eta_l) &= I(\tau, \eta_k, \eta_l) \exp(-\Delta\tau / \eta_l) + i(\tau, \eta_k, \eta_l) \exp(-\tau / \eta_l) + \\ &+ \frac{2}{S} \sum_{j=1}^K I_{12}(\tau, \eta_j, \eta_l) i(\Delta\tau, \eta_k, \eta_j) d^{(n)}(1, j, K). \end{aligned} \quad (3.4.10)$$



Интенсивность излучения, выходящего через верхнюю границу при освещении сверху, будет аналогичной суммой интенсивностей отдельных слоев с учетом ослабления для нижнего и диффузного излучения снизу с (3.4.6):

$$I(0, -\eta_k, \eta_l) = I(0, -\eta_k, \eta_l) + i(0, -\eta_k, \eta_l) \exp(-\tau/\eta_l) + \frac{2}{S} \sum_{j=1}^K I_{21}(\tau, -\eta_j, \eta_l) \tilde{I}(0, -\eta_k, -\eta_j) d^{(n)}(1, j, K). \quad (3.4.11)$$

Интенсивность излучения, выходящего через нижнюю границу при освещении снизу, вновь является суммой от каждого слоя с добавлением диффузного освещения нижнего слоя сверху, которое выражается по (3.4.9):

$$\tilde{I}(\tau + \Delta\tau, \eta_k, -\eta_l) = \tilde{I}(\tau, \eta_k, -\eta_l) \exp(-\Delta\tau/\eta_l) + i(0, -\eta_k, \eta_l) + \frac{2}{S} \sum_{j=1}^K \tilde{I}_{12}(\tau, \eta_j, -\eta_l) i(\Delta\tau, \eta_k, \eta_l) d^{(n)}(1, j, K). \quad (3.4.12)$$

Интенсивность излучения, выходящего через верхнюю границу при освещении снизу, получается аналогичными рассуждениями:

$$\tilde{I}(0, -\eta_k, -\eta_l) = \tilde{I}(0, -\eta_k, -\eta_l) \exp(-\Delta\tau/\eta_l) + i(\Delta\tau, \eta_k, \eta_l) \exp(-\tau/\eta_l) + \frac{2}{S} \sum_{j=1}^K \tilde{I}_{21}(\tau, -\eta_j, -\eta_l) \tilde{I}(0, -\eta_k, -\eta_j) d^{(n)}(1, j, K). \quad (3.4.13)$$

Таким образом, восемь соотношений (3.4.6)-(3.3.13) позволяют для объединенного слоя получить те же четыре интенсивности (3.4.10)-(3.4.13), что были для исходного (верхнего) слоя. Следовательно, открывается возможность прибавления к объединенному слою снизу нового оптически тонкого слоя и т.д..

#### Общая схема алгоритма МСС

1) Разбиваем атмосферу на  $N$  оптически однородных слоев с внутренней сеткой по оптической глубине  $\tau_i$ ,  $i=1, \dots, N$ . Здесь для МСС чем меньше толщина однородного слоя, тем точнее метод (стандартно берут  $\Delta\tau = 0.01 \div 0.05$ ). При переходе к внутренней сетке высотного интегрирования (см. раздел 1.3) в МСС проще всего оставить исходную высотную сетку с добавлением в нее при необходимости новых уровней (исходя из требования не превышать оптическую толщину  $\Delta\tau$  каждого слоя между ними). В качестве постоянных параметров слоя в этом случае удобнее всего выбирать средние значения между уровнями.

2) Цикл по азимутальным гармоникам. Для каждой гармоники задаем сетку по косинусу угла рассеяния  $\eta_k$ ,  $k=1, \dots, K$ , с возможностью выбора индивидуальных значений  $K$  (см. раздел 2.3). Искомые интенсивности в МСС имеют размерности  $K \times K$ . Если есть возможность, то в сетку косинусов включают зенитный угол Солнца, если нет – используют интерполяцию (см. конец раздела 2.4).

3) Для каждой гармоники запускаем цикл сложения слоев. Для самого верхнего слоя атмосферы (в нашей нумерации он имеет номер  $N-1$ ) вычисляем интенсивности однократно рассеянного излучения по (3.4.3) и принимаем их за исходные интенсивности  $I(0, -\eta_k, \eta_l)$ ,  $I(\tau, \eta_k, \eta_l)$ ,  $\tilde{I}(0, -\eta_k, -\eta_l)$  и  $\tilde{I}(\tau, \eta_k, -\eta_l)$ . В убывающем цикле для всех последующих слоев (от  $N-2$  до 1) вычисляем интенсивности тонкого слоя по (3.4.3) и пересчитываем интенсивности объединенного слоя по (3.4.6)-(3.4.13). По окончании цикла сложения слоев имеем искомые интенсивности на верхней и нижней границах всей атмосферы. Обратим внимание, что промежуточные интенсивности на границах слоев

(3.4.6)-(3.4.9) являются вспомогательными и не могут трактоваться как результаты вычислений интенсивностей внутри атмосферы.

4) После завершения цикла по азимутальным гармоникам складываем их и получаем окончательное решение по (2.2.9).

#### **Учет отражения от поверхности в МСС**

Как ясно из вышеизложенного, собственно МСС решает лишь задачу переноса рассеянного солнечного излучения без учета отражения. Взаимодействие с поверхностью для результатов по МСС может быть промоделировано двумя путями.

Возможно “встраивание” МСС в МПР. В этом случае МСС используется не самостоятельно, а как составная часть МПР, предназначенная для вычисления интенсивности рассеянного солнечного излучения, приходящего на поверхность. Далее дополнительные источники излучения находятся по формулам разделов 2.4 и 2.5 (это формула (2.5.4) с учетом в ней выражения (2.4.7)) и используются в алгоритме МПР. Этот вариант фактически нивелирует, исключает многие преимущества МСС. В частности, нивелируется возможность расчета непосредственно интенсивности излучения.

Более стандартный и практически всегда используемый в компьютерных реализациях МСС прием состоит в том, чтобы учитывать отражение от идеальной изотропной поверхности для нулевой гармоники по соотношениям (2.4.27). Здесь МСС удобен тем, что сразу выдает необходимый двумерный набор зависимостей интенсивности от косинусов зенитных углов освещения и углов визирования.

## 4. Метод Монте-Карло

### 4.1. Статистическое моделирование

#### Особенности метода Монте-Карло

Для метода Монте-Карло (ММК) более строгим является название метод статистического моделирования. Однако предпочитают говорить и писать именно “метод Монте-Карло”. Он имеет весьма специфические особенности, делающие его не похожим на другие методом решения задач для расчета поля рассеянного излучения в атмосфере. Поэтому для его изложения с необходимыми в данном учебном пособии пояснениями и подробностями потребовалась целая глава. ММК настолько отличен от приведенных выше методов, что в отношении него можно даже сказать с юмором: “забудьте все численные методы теории переноса излучения, что знали раньше”. Конечно, не следует ничего забывать!

У ММК есть множество достоинств. Пожалуй, главное из них состоит в том, что он не использует разложение по азимутальным гармоникам, а позволяет работать непосредственно с исходными индикатрисами рассеяния. Т.е. в отличие от рассмотренных выше методов ММК не искажает форму индикатрисы и не содержит в решениях сильно осциллирующих функций.

ММК является очень легким для реализации методом, не содержащим каких-либо сложных математических операций и громоздких формул. В качестве иллюстрации этой его особенности уместно привести легенду, что сотрудниками вычислительного центра Сибирского отделения АН СССР в 1970-х годах код расчета переноса излучения в атмосфере с учетом многократного рассеяния был реализован на карманном программируемом микрокалькуляторе, причем время счета составляло лишь несколько часов. Легенда вполне правдоподобна, поскольку, например, одним из авторов данного пособия алгоритм ММК переноса излучения в двухслойной среде “атмосфера-море” с учетом взволнованной границы раздела был успешно реализован на мини-компьютере с объемом памяти всего 32 Кб (32 килобайта!).

Можно сказать, что ММК обладает максимальной физической наглядностью среди всех численных методов теории переноса излучения. Он на фазе отладки компьютерных кодов позволяет реально “увидеть”, “рассмотреть” все детали формирования поля рассеянного излучения, а также понять все происходящие при этом элементарные процессы. ММК легко позволяет учесть взаимодействие излучения с поверхностью при произвольном типе отражения. ММК позволяет вычислять полусферические потоки излучения непосредственно, минуя вычисление интенсивностей. Как будет показано в последующих главах, ММК без особых проблем может быть модифицирован для немонохроматического излучения, учета поляризации излучения, сферичности атмосферы, вертикальных и горизонтальных неоднородностей и т.п. Таким образом, можно заключить, что ММК является самым универсальным численным методом теории переноса, позволяющим предельно детализировать практически любые физические процессы взаимодействия излучения с атмосферой и поверхностью.

В сущности, ММК – это даже не конкретный метод решения определенной задачи, а набор “инструментов”, т.е. вычислительных приемов, которые могут быть применены для очень широкого круга задач. В этом состоит еще одна причина, чтобы посвятить ему отдельную главу. Владение

этими “инструментами” открывает возможности решения самых разнообразных задач переноса излучения, обзор которых выходит за рамки данного пособия. Да и вряд ли такой обзор вообще возможен, т.к. совершенствование приборов и экспериментов постоянно ставит новые задачи моделирования оптических измерений. Более того, собственно статистическое моделирование выходит далеко за сферу интересов оптики атмосферы и вообще физики. Оно применимо для моделирования самых разнообразных стохастических (т.е. не жестко детерминированных, содержащих элементы неопределенности, случайности) процессов, включая экономику и социальную сферу.

Но к сожалению, ММК отнюдь не идеален и обладает рядом недостатков. И главным из них, нивелирующим многое из перечисленного выше, является наличие в результатах вычислений по ММК случайной погрешности. Таким образом, эти результаты являются прямыми аналогами экспериментальных измерений, требующих соответствующего, не всегда простого анализа. В частности, нужно учитывать случайную погрешность при сравнении результатов двух расчетов. Уменьшение случайной погрешности связано со значительным увеличением времени счета. Существуют специальные вычислительные приемы борьбы с указанной случайной погрешностью, которые будут рассмотрены ниже.

В качестве других недостатков ММК укажем на его низкую эффективность для оптически толстой (при наличии облаков) атмосферы и для теплового излучения (т.е. необходимо затратить значительное время счета для достижения приемлемой случайной погрешности). Поэтому тепловое излучение в рамках ММК в данном пособии не рассматривается.

Существуют два подхода к изложению ММК. Его можно рассматривать как формальное математическое решение уравнения переноса излучения в виде ряда Неймана (см. главу 2). Этот способ более краткий, однако он сводит на нет главное преимущество ММК – возможность приписать каждой из его операций простой и понятный физический смысл. Поэтому мы рассмотрим ММК с точки зрения физико-математического моделирования переноса излучения в атмосфере. Соответствие физического моделирования с теоретическим решением уравнения переноса излучения показано, например, в [3].

### **Идея ММК**

В основе ММК лежит компьютерное моделирование отдельных траекторий условных частиц в атмосфере, называемых “фотонами”. Подчеркнем условность понятия “фотон” в ММК: оно не связано напрямую с физическим определением фотона. Для отдельного фотона моделируется траектория его движения в атмосфере от начала – источника (например, от точки входа солнечного излучения на верхней границе атмосферы) до окончания – обрыва (например, это может быть точка в атмосфере, в которой фотон поглощается, или точка на подстилающей поверхности или поверхности регистрирующего прибора, или точка вылета фотона через верхнюю границу атмосферы). Траектория формируется элементарными процессами взаимодействия фотона с атмосферой и поверхностью, каждый из которых рассматривается как случайный. Таким образом, оптическим параметрам атмосферы и поверхности (альбедо, индикатрисе и т.п.) приписывается вероятностный смысл. На каждом отрезке траектории фотона рассчитывается вклад его энергии в приемники излучения. После моделирования достаточно большого числа фотонов, искомые характеристики поля излучения рассчитываются как математические ожидания энергии в приемниках.

### Пример, поясняющий идею ММК

Следуя [2], поясним идею ММК на простейшем примере.

Рассмотрим поток (не интенсивность!) солнечного излучения, падающего на верхнюю границу атмосферы. Для единичной площадки, перпендикулярной лучам Солнца, обозначим его как  $F_0$  (см. раздел 2.1). Тогда для единичной площадки, параллельной верхней границе с учетом косинусной зависимости имеем значение потока  $F_0^\downarrow = F_0 \eta_0$ , где  $\eta_0$  – зенитный угол Солнца (см. раздел 1.1). Поток на единичную площадку поверхности, т.е. на оптической глубине  $\tau_0$ , определится законом Бугера  $F^\downarrow(\tau_0) = F_0^\downarrow P(\tau_0)$ , где  $P(\tau_0) = \exp(-\tau_0/\eta_0)$  – функция пропускания атмосферы (раздел 1.2). Обратим внимание, что функция пропускания меняется в диапазоне от единицы ( $\tau_0 \rightarrow 0$ ) до нуля ( $\tau_0 \rightarrow \infty$ ). Следовательно, величину  $P(\tau_0)$  можно трактовать как вероятность того, что фотон пройдет сквозь атмосферу оптической толщины  $\tau_0$ .

Рассмотрим теперь  $M$  фотонов и будем последовательно моделировать прохождение каждого из них через атмосферу следующим образом. Выберем случайное число  $r$  из совокупности равномерно распределенных на интервале  $[0,1]$  случайных чисел, причем для каждого фотона берем свое, индивидуальное значение  $r$ . Если  $r \leq P(\tau_0)$ , то будем считать, что данный фотон достиг поверхности, иначе (случай  $r > P(\tau_0)$ ) – не достиг. Подсчитаем число  $M(\tau_0)$  всех достигших поверхности фотонов (их тем больше, чем больше  $P(\tau_0)$ , причем эта пропорциональность прямая в силу равномерности распределения  $r$ ). Для того чтобы получить поток излучения на поверхности, достаточно умножить  $M(\tau_0)$  на энергию одного фотона, т.е. на  $F_0^\downarrow/M$ . Окончательно, ММК дает  $F^\downarrow(\tau_0) = F_0^\downarrow M(\tau_0)/M$ .

Если число фотонов  $M$  будет достаточно большим, то отношение  $M(\tau_0)/M$  будет стремиться к вероятности  $P(\tau_0)$ . При  $M \rightarrow \infty$  мы в точности получим соотношение  $F^\downarrow(\tau_0) = F_0^\downarrow P(\tau_0)$ .

Конечно, можно сказать, что рассмотренная схема моделирования не имеет практического смысла, поскольку ее результат ( $F^\downarrow(\tau_0) = F_0^\downarrow P(\tau_0)$ ) и так был известен заранее. Однако если дополнить эту схему моделями взаимодействия фотона с атмосферой (т.е. поглощением и рассеянием) и поверхностью (т.е. поглощением и отражением на подстилающей поверхности), мы сможем моделировать уже поток многократно рассеянного излучения. Действительно, тогда в рамках изложенной схемы для фотонов, не достигших поверхности, моделируем взаимодействие с атмосферой и после рассеяния продолжаем траекторию уже с новым направлением, а для фотонов, достигших поверхности, моделируем взаимодействие с ней и после отражения продолжаем траекторию с новым направлением. Для продолжающейся траектории моделируем пройденный фотоном оптический путь, а затем новое взаимодействие с атмосферой или поверхностью. И так далее. При каждом попадании фотона на поверхность увеличиваем на единицу значение  $M(\tau_0)$ . В конце вновь подсчитывая  $F^\downarrow(\tau_0) = F_0^\downarrow M(\tau_0)/M$ , получаем уже поток с учетом многократного рассеяния и отражения.

### Задачи моделирования элементарных взаимодействий

Таким образом, для решения задач переноса излучения по ММК необходимо построить статистические модели всего трех процессов:

1) прохождение фотоном определенного оптического пути, т.е. свободный пробег;

2) взаимодействие фотона с атмосферой (поглощение и рассеяние);

3) взаимодействие фотона с поверхностью (поглощение и отражение).

### Моделирование случайных событий и величин

Для решения поставленных задач отвлечемся ненадолго от оптики атмосферы и рассмотрим общие методы математического моделирования случайных событий и величин.

В основе указанного моделирования лежит выбор случайных чисел, равномерно распределенных на интервале  $[0,1]$ . Именно он играет роль “слепого случая” и аналогичен вращению колеса рулетки, откуда и название метода – “Монте-Карло”. В компьютерных кодах для выбора указанных случайных чисел используются специальные алгоритмы – генераторы случайных (точнее, псевдослучайных) чисел (см. Приложение 10).

Договоримся ниже под понятием “случайные числа” понимать только числа, равномерно распределенные на интервале  $[0,1]$ .

Моделирование случайных событий. Случайное событие характеризуется скалярной величиной – вероятностью  $P$ . Для его моделирования возьмем случайное число  $r$  и, если  $r \leq P$ , то будем считать, что событие произошло, иначе (если  $r > P$ ) – событие не произошло. Обоснование такой модели фактически было дано выше (там вместо  $P$  было  $P(\tau_0)$ ), поэтому не будем его повторять.

Если имеется набор из  $L$  альтернативных событий, характеризующихся вероятностями  $P_l$ ,  $l=1, \dots, L$ , то исходя из обязательного условия нормировки вероятностей  $\sum_{l=1}^L P_l = 1$ , следует предварительно вычислить “развертку” этого

набора на интервале  $[0,1]$ :  $R_1 = 0$ ,  $R_{l+1} = \sum_{k=1}^l P_k$ ,  $l=1, \dots, L$ . Далее, для этой развертки  $R_k$ ,  $k=1, \dots, L+1$  выбираем случайное число  $r$ , находим номер интервала  $m$ , для которого  $R_m \leq r < R_{m+1}$  (см. Приложение 1), и считаем, что произошло событие с номером  $m$ . Обоснование этой модели сразу становится понятным, если изобразить точки  $R_k$  на отрезке  $[0,1]$ .

Моделирование случайных величин. Одномерная случайная величина характеризуется своей плотностью вероятности, т.е. функцией распределения  $\rho(u)$  на интервале  $[a,b]$ . По определению плотности вероятности, вероятность появления значения этой величины в интервале  $[a,u]$  равна

$$P(u) = \int_a^u \rho(u') du'. \quad (4.1.1)$$

Применяя приведенную выше модель случайных событий для интервала  $[u_1, u]$  при  $u_1 \rightarrow u$ , получаем для моделирования рассматриваемой случайной величины соотношение

$$\int_a^u \rho(u') du' = r, \quad (4.1.2)$$

где  $r$  – случайное число, а (4.1.2) есть уравнение для нахождения по нему значения случайной величины  $u$ .

Для моделирования многомерной случайной величины, характеризующейся функцией распределения  $\rho(u_1, u_2, \dots, u_m)$ , используют следующий прием. Рассматривают одномерную функцию  $\rho_1(u_1) = \int \rho(u_1, u_2, u_3, \dots, u_m) du_2 du_3 \dots du_m$ , для которой моделируют значение  $u_1$  по (4.1.2). Пределы интегрирования зависят от конкретики функции (формально в теории задают от  $-\infty$  до  $+\infty$ ). Далее при найденном значении  $u_1$  снова

рассматривают одномерную функцию  $\rho_2(u_2) = \frac{\int \rho(u_1, u_2, u_3, \dots, u_m) du_3 \dots du_m}{\int \rho(u_1, u_2, u_3, \dots, u_m) du_2 du_3 \dots du_m}$ ,

для которой находят  $u_2$  по (4.1.2). Деление на интеграл необходимо, чтобы выполнялось условие нормировки для плотности вероятности  $\int \rho(u_2) du_2 = 1$ . Далее процесс продолжают, сводя моделирование на каждом шаге к модели одномерной функции.

В частности, для функции двух переменных получаем последовательные уравнения

$$\int_{a_1}^{u_1} \int_{a_2}^{b_2} \rho(u_1', u_2') du_1' du_2' = r_1, \\ \int_{a_2}^{u_2} \rho(u_1, u_2') du_2' = r_2 \int_{a_2}^{b_2} \rho(u_1, u_2') du_2', \quad (4.1.3)$$

где  $[a_1, b_1]$  и  $[a_2, b_2]$  – интервалы задания функции по каждой переменной,  $r_1$  и  $r_2$  – пара различных случайных чисел.

## 4.2. Моделирование элементарных процессов при переносе излучения

### Моделирование свободного пробега фотона

Опираясь на общие принципы статистического моделирования, получим теперь необходимые нам модели элементарных взаимодействий фотона с атмосферой и поверхностью.

Модель свободного пробега фотона легко получается из приведенного в разделе 4.1 примера с потоком. Заменим конкретные значения  $\tau_0$  и  $\eta_0$  на общие – оптическую толщину слоя атмосферы  $\Delta\tau$  и косинус зенитного угла излучения  $\eta$ . Тогда вероятность пройти сквозь слой оптической толщины  $\Delta\tau$  есть  $P = \exp(-\Delta\tau / |\eta|)$ , альтернативная вероятность взаимодействия в этом слое есть  $1 - \exp(-\Delta\tau / |\eta|)$ . Но тогда именно эта величина (вероятность не пройти слой толщиной от 0 до  $\Delta\tau$ ) по смыслу и определяет плотность вероятности свободного пробега. Согласно (4.1.1) плотность есть производная от функции распределения вероятности. Таким образом,

$$\rho(\Delta\tau) = \frac{1}{|\eta|} \exp(-\Delta\tau/|\eta|). \quad (4.2.1)$$

Подставляя функцию распределения (4.2.1) в уравнение (4.1.2) с пределами интегрирования от 0 до  $\Delta\tau$  после элементарных вычислений получаем модель свободного пробега фотона

$$\Delta\tau = -\eta \ln r. \quad (4.2.2)$$

При записи формулы (4.2.2) мы учли, что в силу равномерного распределения случайных чисел величины  $1-r$  и  $r$  эквивалентны. Отметим, что в формуле (4.2.2) существенны знаки: если  $\eta > 0$ , то фотон летит вниз и его оптическая глубина увеличивается ( $\Delta\tau > 0$ ), если  $\eta < 0$ , то фотон летит вверх и его оптическая глубина уменьшается ( $\Delta\tau < 0$ ).

### **Моделирование взаимодействия фотона с атмосферой**

Альтернатива: рассеяние – поглощение. Вспомним второе название альбедо однократного рассеяния  $\Lambda$  (см. раздел 2.1) – вероятность выживания фотона в акте рассеяния. Но тогда, выбирая случайное число  $r$ , сразу имеем модель: если  $r \leq \Lambda$ , то происходит рассеяние, иначе ( $r > \Lambda$ ) происходит поглощение.

Моделирование угла рассеяния. Вновь возвращаясь к исходным определениям, рассмотрим условие нормировки индикатрисы рассеяния (2.1.2), которое с учетом замены угла рассеяния его косинусом  $\chi$  примет вид

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(\chi) d\chi = 1. \quad (4.2.3)$$

Поскольку индикатриса является неотрицательная функцией, из соотношения (4.2.3) следует, что косинус угла рассеяния распределен на интервале  $[-1,1]$  с плотностью вероятности  $x(\chi)/2$ . Следовательно, для моделирования угла рассеяния после выбора случайного числа  $r$  согласно (4.1.2) получаем уравнение

$$\int_{-1}^{\chi} x(\chi') d\chi' = 2r. \quad (4.2.4)$$

Методы решения уравнения (4.2.4) зависят от конкретного типа индикатрисы (см. раздел 2.2).

Для релеевской индикатрисы (2.2.17) и (2.2.18) из формулы (4.2.4) получается кубическое уравнение, которое может быть решено аналитически по известным формулам. Однако случай чисто релеевского рассеяния малоинтересен в ММК, т.к. реальные индикатрисы существенно отличаются от релеевской из-за наличия в атмосфере аэрозолей. Поэтому нет смысла специально возиться с громоздким решением кубического уравнения (все же получите его в качестве упражнения, доказав, заодно, единственность решения, на самом деле ничего более громоздкого чем собственно формула Кардано для данной индикатрисы не возникает).

Для функции Хеньи-Гринштейна (2.2.20) уравнение (4.2.4) имеет явное решение, которое рекомендуем получить в качестве упражнения:

$$\chi = \frac{2r(1+g^2)(gr+1-g) - (1-g)^2}{(2gr+1-g)^2}. \quad (4.2.5)$$

Для произвольных индикатрис рассеяния в ММК используется табличное задание по косинусам углов:  $x_k(\chi_k)$ ,  $k=1, \dots, K$ ,  $\chi_1 = -1$ ,  $\chi_K = 1$ , а



интеграл в (4.2.4) вычисляется по формуле трапеций. В результате уравнение (4.2.4) сводится к квадратному. Соответствующие выкладки подробно расписаны в [2], потому не будем их здесь воспроизводить, рекомендуя читателю в качестве упражнения разобраться в них или получить решение самостоятельно, тем более, что ответ сейчас будет написан. Итак, в общем случае табличной индикатрисы для моделирования угла рассеяния в ММК по случайному числу  $r$  получаем следующее соотношение

$$\chi = \chi_k + \frac{-x_k(\chi_k) + \sqrt{x_k^2(\chi_k) + 2d_k(2r - S_k)}}{d_k}, \quad (4.2.6)$$

где

$$S_1 = 0, \quad S_k = S_{k-1} + \frac{1}{2}(x_k(\chi_k) + x_{k-1}(\chi_{k-1}))(\chi_k - \chi_{k-1}), \quad k = 2, \dots, K, \quad (4.2.7)$$

$d_k = \frac{x_{k+1}(\chi_{k+1}) - x_k(\chi_k)}{\chi_{k+1} - \chi_k}$ . Разумеется, массив  $S_k$  разумно вычислить заранее, до

моделирования траекторий фотонов, и нормировать на  $S_K$ , чтобы выполнялось  $S_K = 2$ . Индекс  $k$  определяется из условия  $S_k \leq 2r \leq S_{k+1}$  (см. Приложение 1). Если  $d_k = 0$ , то (4.2.6) заменяется на  $\chi = \chi_k + (2r - S_k)/x(\chi_k)$ .

Моделирование азимута рассеяния. Поскольку мы рассматриваем индикатрисы, не зависящие от азимута рассеяния  $\phi$ , то указанный азимут равновероятен, то есть имеет равномерное распределение на интервале  $[0, 2\pi]$ . Отсюда, выбирая случайное число  $r$ , получаем простую модель

$$\phi = 2\pi r. \quad (4.2.8)$$

Отметим, что для ММК не составляет проблем рассматривать индикатрисы и с зависимостью от азимута рассеяния, т.е.  $x(\gamma, \phi)$ . После их табличного задания, моделирование угла и азимута рассеяния осуществляется по соотношениям (4.1.3) с получением итоговых формул, аналогичных (4.2.6) (опять же распишите их в качестве упражнения).

Определение нового направления фотона после рассеяния. Пусть до рассеяния фотон имел направление, заданное косинусом зенитного угла  $\eta$  и азимутом  $\varphi$ . После рассеяния на угол с косинусом  $\chi$  (4.2.5)-(4.2.6) и азимутом  $\phi$  (4.2.8) он приобретет новое направление, косинус зенитного угла и азимут которого обозначим  $\eta^{(s)}$ ,  $\varphi^{(s)}$ . Формулы для нового направления несложно получить следующим рассуждением. Если бы старое направление до рассеяния было вертикальной координатной осью, мы бы имели  $\eta^{(s)} = \chi$  и  $\varphi^{(s)} = \phi$ . Осуществим соответствующий поворот исходной координатной оси. После него исходная ось имеет координаты  $\eta$  и  $\pi + \varphi$ , поэтому угол между направлениями  $(\eta, \pi + \varphi)$  и  $(\chi, \phi)$  равен  $\eta^{(s)}$ , а до поворота угол между направлениями  $(\eta, \varphi)$  и  $(\eta^{(s)}, \varphi^{(s)})$  равен  $\chi$ . Выписывая для соответствующих косинусов углов соотношения (2.1.5), имеем

$$\eta^{(s)} = \eta\chi - \sqrt{(1-\eta^2)(1-\chi^2)} \cos(\varphi - \phi), \quad (4.2.9)$$

$$\chi = \eta\eta^{(s)} + \sqrt{(1-\eta^2)(1-(\eta^{(s)})^2)} \cos(\varphi - \varphi^{(s)}). \quad (4.2.10)$$

Косинус нового направления фотона  $\eta^{(s)}$  определяется непосредственно по формуле (4.2.9), после чего из (4.2.10) можно определить азимут нового

направления  $\varphi^{(s)}$ . С азимутом возникает некоторая проблема, поскольку через косинус его нельзя определить однозначно (т.к.  $\cos(\varphi) = \cos(-\varphi) = \cos(2\pi - \varphi)$ ). Из (4.2.10) формально следует, что

$$\varphi^{(s)} = \varphi - (1 + \delta)\pi + \delta \arccos\left(\frac{\chi - \eta\eta^{(s)}}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-(\eta^{(s)})^2)}}\right), \quad (4.2.11)$$

где  $\delta = 1$  или  $\delta = -1$ .

Для определения конкретного значения  $\delta$  опять потребуется рассуждение. Азимут отсчитывается от произвольного направления в плоскости, перпендикулярной направлению излучения. Но для азимутов  $\varphi$  и  $\phi$  это разные плоскости (одна перпендикулярна вертикальной оси, другая – направлению исходного излучения  $(\eta, \varphi)$ ). Таким образом, говорить о пересчете азимутов можно лишь согласовав направления его отсчета в этих двух плоскостях. Для этого согласования обратимся к уже приведенному рассуждению: если бы направление  $(\eta, \varphi)$  совпадало с координатной осью, мы имели бы  $\varphi^{(s)} = \phi$ . Но это означает, что и в общем случае в плоскости, которая перпендикулярна направлению  $(\eta, \varphi)$  и в которой отсчитывается угол  $\phi$ , направление отсчета азимута должно быть тем же (вдоль проекции вектора нулевого азимута на указанную плоскость). Отсюда, если  $0 \leq \phi \leq \pi$ , азимут после рассеяния должен увеличиваться, а если  $\pi \leq \phi < 2\pi$  – уменьшаться. Окончательно получаем (4.2.11) в виде

$$\varphi^{(s)} = \varphi + \text{sign}(\pi - \phi) \arccos\left(\frac{\chi - \eta\eta^{(s)}}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-(\eta^{(s)})^2)}}\right), \quad (4.2.12)$$

где  $\text{sign}()$  – знак аргумента. Отметим, что после вычислений по (4.2.12) азимут  $\varphi^{(s)}$  следует привести к интервалу  $[0, 2\pi]$  (прибавлением  $2\pi$ , если  $\varphi^{(s)} < 0$  или вычитанием  $2\pi$ , если  $\varphi^{(s)} > 2\pi$ ).

### **Моделирование взаимодействия фотона с поверхностью**

Чтобы уяснить все особенности и детали взаимодействия фотона с поверхностью, начнем рассмотрение с простейшего и весьма часто возникающего в прикладных задачах случая идеального изотропного отражения, а уже потом перейдем к модели общего вида.

Идеальная изотропная поверхность. Она характеризуется единственной величиной – альбедо  $A$  (см. раздел 1.4). Поскольку  $0 \leq A \leq 1$ , альбедо можно трактовать как вероятность отражения. Следовательно, после выбора случайного числа  $r$  определяем: если  $r \leq A$ , то происходит отражение, если  $r > A$ , то происходит поглощение (т.е. фотон выбывает из процесса рассеяния, а его траектория обрывается).

Излучение отражается от идеальной изотропной поверхности одинаково во все стороны, поэтому его угол и азимут распределены равномерно. Выбирая два случайных числа  $r_1$  и  $r_2$ , моделируем  $\eta^{(r)}$  и  $\varphi^{(r)}$  – косинус угла и азимут направления фотона после отражения:

$$\eta^{(r)} = -\cos(r_1\pi/2), \quad \varphi^{(r)} = 2\pi r_2. \quad (4.2.13)$$

Обратим внимание на первую из формул (4.2.13), что равномерно распределен именно угол отражения, но не его косинус  $\eta^{(r)}$  (довольно распространенной

ошибкой является моделирование величин  $\eta^{(r)}$  по равномерному распределению).

Произвольная отражающая поверхность – альтернатива: отражение – поглощение. В общем случае отражающая поверхность характеризуется двунаправленным коэффициентом  $r(\eta, -\eta^{(r)}, \varphi, \varphi^{(r)})$  (2.4.1) (см. раздел 2.4), где  $\eta$  и  $\varphi$  – косинус зенитного угла и азимут падающего излучения,  $\eta^{(r)}$  и  $\varphi^{(r)}$  – аналогичные характеристики направления отражения. Для удобства здесь мы используем двунаправленный коэффициент как функцию четырех переменных, хотя реально в нем их лишь три (азимуты входят в виде разности) и считаем все косинусы в ней положительными (поэтому  $\eta^{(r)}$  со знаком минус).

Альbedo поверхности определено как отношение восходящего потока к нисходящему для любых поверхностей (а не только для идеальной изотропной, как иногда считают). В нашем случае роль нисходящего потока играет приходящий на поверхность фотон: он является “переносчиком” потока (см. пример в разделе 4.1). Поэтому в ММК удобно использовать не двунаправленный коэффициент отражения, а коэффициент спектральной яркости (КСЯ) поверхности  $\rho(\eta, \eta^{(r)}, \varphi, \varphi^{(r)})$ , выражающий отраженную интенсивность как функцию падающего потока при освещении из направления  $(\eta, \varphi)$ . Его связь с двунаправленным коэффициентом дается соотношением (см. подробности в [1,2])

$$\rho(\eta, \eta^{(r)}, \varphi, \varphi^{(r)}) = \frac{\pi}{\eta} r(\eta, \eta^{(r)}, \varphi, \varphi^{(r)}). \quad (4.2.14)$$

Интегрируя КСЯ с учетом определения восходящего потока (1.1.13), получаем альbedo поверхности

$$A(\eta, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \rho(\eta, \eta', \varphi, \varphi') \eta' d\eta'. \quad (4.2.15)$$

Обратим внимание, что для произвольной поверхности альbedo зависит от направления падения излучения и что для идеального изотропного отражения согласно (4.2.15) альbedo КСЯ совпадают ( $\rho(\eta, \eta^{(r)}, \varphi, \varphi^{(r)}) \equiv A$ ).

Дальнейшее очевидно: для фотона, пришедшего на поверхность из направления  $(\eta, \varphi)$  определяем по (4.2.15) альbedo, выбираем случайное число  $r$ . Если  $r \leq A(\eta, \varphi)$ , то происходит отражение, а если  $r > A(\eta, \varphi)$ , то имеет место поглощение. Если для конкретной модели отражения  $\rho(\eta, \eta^{(r)}, \varphi, \varphi^{(r)})$  интеграл (4.2.15) не берется аналитически, его необходимо предварительно затабулировать для набора аргументов  $0 < \eta \leq 1$  и  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , после чего значение альbedo для произвольных значений  $\eta$  и  $\varphi$  следует вычислять линейной интерполяцией по таблице. Так же следует поступать в общем для ММК случае табличного задания КСЯ, т.е. вычислять при табуляции интеграл (4.2.15) по квадратурной формуле трапеций (см. подробности в Приложении 11).

Произвольная отражающая поверхность – определение направления отражения. Для того чтобы промоделировать новое направление фотона после отражения, величине КСЯ необходимо приписать смысл плотности вероятности отражения в направлении  $(\eta^{(r)}, \varphi^{(r)})$ . Это просто сделать, введя нормированную функцию

$$\rho^{(r)}(\eta, \eta^{(r)}, \varphi, \varphi^{(r)}) = \frac{\rho(\eta, \eta^{(r)}, \varphi, \varphi^{(r)})}{\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \rho(\eta, \eta', \varphi, \varphi') d\eta'}, \quad (4.2.16)$$

которая при фиксированных  $\eta$  и  $\varphi$  может рассматриваться как плотность вероятности отражения в направлении  $(-\eta^{(r)}, \varphi^{(r)})$ , поскольку является неотрицательной и для нее выполнено условие нормировки  $\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \rho^{(r)}(\eta, \eta', \varphi, \varphi') d\eta' = 1$ . Обратим внимание, что интеграл в знаменателе (4.2.16) не равен альбедо (4.2.15).

Теперь направление отражения  $(\eta^{(r)}, \varphi^{(r)})$  моделируется для (4.2.16) по формулам (4.1.3). Если уравнения (4.1.3) не имеют аналитических решений, то следует перейти к табличному заданию функции  $\rho^{(r)}(\eta, \eta^{(r)}, \varphi, \varphi^{(r)})$ , после чего уравнения (4.1.3) при использовании для интегралов формулы трапеций сводятся к квадратным уравнениям с решениями, аналогичными формулам (4.2.6) и (4.2.7) для индикатрисы рассеяния. Явный вид этих решений приведен в Приложении 11. Читателю предлагается разобраться в деталях их получения в качестве полезного упражнения.

Идеальная зеркальная поверхность. Для этого случая согласно соотношениям (4.2.14) и (4.2.15) имеем  $A(\eta) = r(\eta)$ , где  $r(\eta)$  – коэффициент отражения (1.4.6). Зависимость альбедо от азимута отсутствует. Соответственно, для моделирования альтернативы “отражение – поглощение” используется непосредственно  $r(\eta)$ .

Направление отраженного фотона при идеальном зеркальном отражении не является случайным, т.к.  $\eta^{(r)} = -\eta$ ,  $\varphi^{(r)} = \varphi$ . Это как раз и создает определенные трудности, поскольку жестко детерминированный процесс отражения не вписывается в идеологию ММК. Ниже нам еще придется рассматривать случай идеального зеркального отражения как особый.

#### **Счетчики полусферических потоков**

Будем, как оговорено выше, для начала рассматривать задачу расчета по ММК полусферических потоков рассеянного солнечного излучения. Во вводном примере раздела 4.1 мы подсчитывали число фотонов, достигших поверхности, а затем по нему получали искомый поток. Этот способ допускает очевидное обобщение.

Пусть необходимо вычислить полусферический поток (нисходящий или восходящий) на оптической глубине  $\tau^*$  ( $0 \leq \tau^* \leq \tau_0$ ). Будем подсчитывать число фотонов, пролетающих уровень  $\tau^*$  в направлении “вниз” для нисходящего потока или в направлении “вверх” для восходящего. А далее нужно действовать по уже отработанной в разделе 4.1 схеме, т.е. необходимо умножить это число на энергию одного фотона. Выражение “фотон пролетел уровень  $\tau^*$ ” имеет следующий смысл. Пусть оптическая глубина фотона до моделирования свободного пробега была равна  $\tau$ . Тогда, если  $\tau < \tau^*$  и после моделирования по (4.2.2)  $\tau + \Delta\tau > \tau^*$ , то фотон пролетел уровень  $\tau^*$  вниз, а если до моделирования было  $\tau > \tau^*$  и после него  $\tau + \Delta\tau < \tau^*$ , то фотон пролетел вверх.

Для подсчета числа соответствующих событий пролета уровня  $\tau^*$  введем специальные величины, которые назовем (в данном конкретном случае)

“счетчиками” нисходящего или восходящего полусферического потока. Обозначим их  $\xi_1^\downarrow(\tau^*)$  и  $\xi_1^\uparrow(\tau^*)$ , соответственно. Перед моделированием траектории фотона присвоим счетчикам нулевые значения, а затем при каждом событии пролета фотоном счетчика (вниз или вверх для каждого из полусферических потоков, соответственно) будем прибавлять единицу:

$$\xi_1^\downarrow(\tau^*) := \xi_1^\downarrow(\tau^*) + 1, \quad \xi_1^\uparrow(\tau^*) := \xi_1^\uparrow(\tau^*) + 1. \quad (4.2.17)$$

Здесь “:=” – оператор присваивания (см. раздел 2.3) очень удобный для записи соотношений ММК, которым мы постоянно будем пользоваться ниже.

Назовем операцию (4.2.17) “записью в счетчик”. Ее можно рассматривать как модель измерений в рамках моделирования элементарных процессов по ММК.

После окончания моделирования всех  $M$  траекторий искомые значения полусферических потоков рассчитываются по уже обсуждавшимся в разделе 4.1 соотношениям

$$F^\downarrow(\tau^*) = F_0 \eta_0 \xi_1^\downarrow(\tau^*) / M, \quad F^\uparrow(\tau^*) = F_0 \eta_0 \xi_1^\uparrow(\tau^*) / M. \quad (4.2.18)$$

### Оценка случайной погрешности вычислений по ММК

Как отмечалось в разделе 4.1, результаты расчетов по ММК содержат случайную погрешность, что является существенным недостатком этого метода. Указанная случайная погрешность может быть вычислена в рамках ММК наряду с искомыми величинами.

Поскольку процесс переноса излучения в ММК моделируется как случайный, значения счетчиков  $\xi_1^\downarrow(\tau^*)$  и  $\xi_1^\uparrow(\tau^*)$  должны рассматриваться как случайные величины. Фигурирующие в (4.2.18) отношения  $\xi_1^\downarrow(\tau^*)/M$  и  $\xi_1^\uparrow(\tau^*)/M$  есть не что иное, как оценки математического ожидания этих случайных величин. Введем дополнительно счетчики  $\xi^\downarrow(\tau^*)$  и  $\xi^\uparrow(\tau^*)$  с нулевыми начальными значениями при запуске каждой(!) новой траектории и соотношениями записи в течение одной траектории по аналогии с уже введенными по формуле (4.2.17). Тогда для общих счетчиков  $\xi_1^\downarrow(\tau^*)$  и  $\xi_1^\uparrow(\tau^*)$  в конце каждой траектории будем иметь запись

$$\xi_1^\downarrow(\tau^*) := \xi_1^\downarrow(\tau^*) + \xi^\downarrow(\tau^*), \quad \xi_1^\uparrow(\tau^*) := \xi_1^\uparrow(\tau^*) + \xi^\uparrow(\tau^*). \quad (4.2.19)$$

Таким образом, формальная математическая задача расчетов по ММК сводится к оценке по конечной выборке из  $M$  реализаций математического ожидания некоторых случайных величин. В рассматриваемом случае это величины  $\xi^\downarrow(\tau^*)$  и  $\xi^\uparrow(\tau^*)$ , которые равны количеству фотонов, попадающих в счетчик за одну траекторию. С этих позиций несложно найти и другие различные статистические оценки указанных случайных величин, наибольший интерес из которых представляет дисперсия. Введем счетчики квадратов  $\xi_2^\downarrow(\tau^*)$ ,  $\xi_2^\uparrow(\tau^*)$  и одновременно с (4.2.19) будем записывать

$$\xi_2^\downarrow(\tau^*) := \xi_2^\downarrow(\tau^*) + (\xi^\downarrow(\tau^*))^2, \quad \xi_2^\uparrow(\tau^*) := \xi_2^\uparrow(\tau^*) + (\xi^\uparrow(\tau^*))^2. \quad (4.2.20)$$

Используя известное выражение для дисперсии  $\mathbf{D}(\xi) = \mathbf{M}(\xi^2) - \mathbf{M}^2(\xi)$ , где  $\mathbf{M}(\dots)$  – математическое ожидание, получаем

$$\mathbf{D}(\xi^\downarrow(\tau^*)) = \frac{1}{M} \xi_2^\downarrow(\tau^*) - \left( \frac{1}{M} \xi_1^\downarrow(\tau^*) \right)^2,$$

$$\mathbf{D}(\xi^{\uparrow}(\tau^*)) = \frac{1}{M} \xi_2^{\uparrow}(\tau^*) - \left( \frac{1}{M} \xi_1^{\uparrow}(\tau^*) \right)^2. \quad (4.2.21)$$

Далее на основании центральной предельной теоремы можно утверждать, что независимо от вида распределений случайных величин на траекториях  $\xi^{\downarrow}(\tau^*)$  и  $\xi^{\uparrow}(\tau^*)$  (нам неизвестных) при  $M \rightarrow \infty$  их средние арифметические  $\xi_1^{\uparrow}(\tau^*)/M$  и  $\xi_1^{\downarrow}(\tau^*)/M$  имеют нормальное распределение. Отсюда следуют формулы для оценки среднеквадратических отклонений (СКО) искомых потоков (см. подробнее [3])

$$s(F^{\downarrow}(\tau^*)) = F_0 \eta_0 \sqrt{\mathbf{D}(\xi^{\downarrow}(\tau^*)) / M}, \quad s(F^{\uparrow}(\tau^*)) = F_0 \eta_0 \sqrt{\mathbf{D}(\xi^{\uparrow}(\tau^*)) / M}. \quad (4.2.22)$$

СКО вида (4.2.22) используется в ММК в качестве оценки случайной погрешности расчетов. Чем больше число траекторий  $M$ , тем эта погрешность меньше. Однако она убывает пропорционально  $\sqrt{M}$ , т.е. для повышения точности расчетов вдвое число траекторий должно быть увеличено вчетверо с соответствующим возрастанием и времени счета. Важной особенностью ММК, вытекающей из (4.2.22), является возможность контролировать случайную погрешность непосредственно в ходе вычислений, рассчитывая СКО (4.2.22) через определенное число (обычно – сотни) траекторий. Это позволяет предусмотреть режим прекращения вычислений не по числу всех траекторий  $M$ , а при достижении заранее заданной точности (на практике режимы всегда совмещают – или по точности, или по  $M$ ).

#### **Схема зависимых испытаний**

Случайная погрешность расчетов по ММК особенно усложняет анализ результатов, если речь идет об их отличиях, вызванных малыми вариациями параметров атмосферы или поверхности. В частности, при расчете спектров излучения для соседних длин волн. В таких случаях упростить ситуацию может корреляция случайной погрешности подобных вычислений (т.е. в абсолютных значениях погрешность остается той же, но в конкретных расчетах, отклонения от среднего на соседних длинах волн, обусловленные случайной погрешностью, являются одинаковыми). Достичь этого можно, если “заставить” фотоны в двух сравниваемых случаях двигаться по одинаковым траекториям. Практической реализацией этой идеи является схема зависимых испытаний (СЗИ) в ММК.

Возможны два пути технической реализации СЗИ. В первом случае она достигается одновременным моделированием траекторий фотонов в различных моделях среды (путем организации при каждом акте моделирования траектории соответствующего цикла по этим моделям). В другом варианте – более простом и экономичном в смысле затрат ресурсов компьютера – одинаковость траекторий в разных средах достигается единой последовательностью случайных чисел, применяемой для их моделирования. Этот вариант основан на особенностях генераторов случайных чисел (см. Приложение 10).

Следует заметить, что ни один из вариантов СЗИ не гарантирует абсолютного совпадения траекторий. Действительно, легко рассмотреть возможность такого, например, варианта, когда при моделировании рассеяния фотона в атмосфере (2.4.5)-(2.4.12), несмотря на одинаковые случайные числа, фотон в одной среде начнет двигаться вверх, а в другой – вниз вследствие разницы в углах рассеяния, вызванной различными индикатрисами сред. После такого события дальнейшие отрезки траекторий в двух средах будут уже

совершенно не похожи. Очевидно, что вероятность таких событий в рамках СЗИ тем меньше, чем меньше различаются модели сред.

### 4.3. Расчет полусферических потоков солнечного излучения

#### Схема алгоритма расчета потоков

Собрав вместе всю информацию предыдущего раздела, получаем следующую схему алгоритма расчета потоков по ММК.

1) Задана модель атмосферы: сетка высот  $z_i$ , объемных коэффициентов рассеяния и поглощения  $\sigma_i(z_i)$ ,  $k_i(z_i)$ , соответствующих им оптических глубин  $\tau_i$  и альbedo однократного рассеяния  $\Lambda_i(\tau_i)$ , индикатриса рассеяния (в общем случае таблица)  $x_{ik}(\tau_i, \chi_k)$ ,  $i=1, \dots, N$ ,  $k=1, \dots, K$ , причем  $\tau_1 \equiv \tau_0$ ,  $\tau_N = 0$ ,  $\chi_1 = -1$ ,  $\chi_K = 1$ . Для индикатрисы Хеньи-Гринштейна (2.2.20) достаточно задать  $g_i(\tau_i)$ .

2) Задана модель поверхности, в общем случае, КСЯ  $\rho(\eta, \eta^{(r)}, \varphi, \varphi^{(r)})$  в форме таблицы (см. Приложение 11). Для идеальной изотропно отражающей поверхности задается альbedo  $A$ , а для идеальной зеркальной поверхности (1.4.6) задается комплексный показатель вещества поверхности  $\tilde{m}$ . Напомним, модели атмосферы и поверхности задаются для монохроматического случая с известной длиной волны.

3) Задана высота  $z^*$  для уровня измерения нисходящего и восходящего потоков. Затем по модели атмосферы найдена (см. Приложение 1 и раздел 1.2) соответствующая ей оптическая глубина  $\tau^*$  ( $0 \leq \tau^* \leq \tau_0$ ). Отметим, что в ММК оптимальным является вычислять потоки не на одной, а сразу на всех требуемых высотах (оптических глубинах), что элементарно достигается введением в алгоритм соответствующих массивов счетчиков и циклов записи в них.

4) Заданы внутренние параметры расчетов: максимальное число траекторий  $M$ , требуемая относительная точность расчетов в долях  $d$ , число траекторий, через которые проверяется точность  $M_1$ .

5) При необходимости предварительно вычисляются массивы индикатрис рассеяния  $S_k(\tau_i)$  по (4.2.7) и отражения (см. Приложение 11).

6) Обнуляются счетчики потоков и их дисперсий  $\xi_1^\downarrow(\tau^*) = 0$ ,  $\xi_1^\uparrow(\tau^*) = 0$ ,  $\xi_2^\downarrow(\tau^*) = 0$  и  $\xi_2^\uparrow(\tau^*) = 0$ .

7) Организуется цикл по траекториям фотонов  $m=1, \dots, M$ .

8) Старт фотона происходит с верхней границы атмосферы. Присваиваем начальные координаты:  $\tau = 0$ ,  $\eta = \eta_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$  ( $\varphi_0$  – азимут Солнца). Обнуляем счетчики по траектории  $\xi^\downarrow(\tau^*) = \xi^\uparrow(\tau^*) = 0$ .

9) Моделируем свободный пробег фотона: находим  $\Delta\tau$  по соотношению (4.2.2) и присваиваем  $\tau' = \tau + \Delta\tau$ .

10) Запись в счетчики. Если  $\tau < \tau^* \leq \tau'$ , то  $\xi^\downarrow(\tau^*) := \xi^\downarrow(\tau^*) + 1$ . Если  $\tau' \leq \tau^* < \tau$ , то  $\xi^\uparrow(\tau^*) := \xi^\uparrow(\tau^*) + 1$ .

11) Анализ положения фотона. Присваиваем  $\tau = \tau'$ . Если  $\tau \leq 0$ , то фотон вылетел через верхнюю границу атмосферы (т.е. достигнут конец траектории), после чего выполняется переход на операцию 14 алгоритма. Если  $\tau \geq \tau_0$ , то

фотон достиг поверхности – выполняется переход на операцию 13 алгоритма. Иначе (если  $0 < \tau < \tau_0$ ) – фотон остался в атмосфере – выполняется переход на следующую операцию 12 алгоритма.

12) Взаимодействие фотона с атмосферой. Находим номер слоя атмосферы  $i$  из неравенства  $\tau_{i+1} \leq \tau \leq \tau_i$  (см. Приложение 1). Здесь возможны два варианта действий. Первый – более простой – используем кусочно-постоянную аппроксимацию оптических параметров слоев; второй – более сложный, но и более точный – используем кусочно-линейную аппроксимацию (см. раздел 1.2). В первом варианте альbedo однократного рассеяния есть просто  $\Lambda = \Lambda_i(\tau_i)$ . Во втором варианте альbedo однократного рассеяния надо вычислить как  $\Lambda = \sigma(\tau)/(\sigma(\tau) + k(\tau))$ , где значения объемных коэффициентов  $\sigma(\tau)$  и  $k(\tau)$  находятся линейной интерполяцией по значениям  $\tau$  и  $\sigma_i(\tau_i)$ ,  $\sigma_{i+1}(\tau_{i+1})$ ,  $k_i(\tau_i)$ ,  $k_{i+1}(\tau_{i+1})$ , соответственно. По значениям  $\Lambda$  моделируем, произошло рассеяние или поглощение (см. раздел 2.2). В случае поглощения – конец траектории – переход на операцию 14 алгоритма. В случае рассеяния собственно индикатриса и ее функция  $S_k$  также зависят от типа аппроксимации: для кусочно-постоянной берем их значения для слоя номер  $i$ , а для кусочно-линейной – интерполируем. Причем сначала надо определить номер интервала  $k$  в (4.2.6) для границ слоя, а потом интерполировать в узком интервале индексов (подробно этот прием описан в Приложении 11). Для функции Хеньи-Гринштейна выбирается или интерполируется параметр  $g(\tau)$ . Далее моделируем угол и азимут рассеяния по (4.2.5)-(4.2.7), затем находим новое направление фотона по (4.2.9) и (4.2.12), присваиваем  $\eta = \eta^{(s)}$ ,  $\varphi = \varphi^{(s)}$  и переходим на моделирование свободного пробега фотона – операцию 9 алгоритма.

13) Взаимодействие фотона с поверхностью. Находим из (4.2.15) альbedo  $A(\eta, \varphi)$  (см. Приложение 11). Для идеально изотропной поверхности  $A$  является константой, а для идеально зеркальной – это коэффициент отражения (1.4.6)  $A(\eta) = r(\eta)$ . По альbedo моделируем, произошло отражение или поглощение (см. раздел 4.2). В случае поглощения – конец траектории – переход на операцию 14 алгоритма. В случае отражения моделируется (см. раздел 4.2 и Приложение 11) его направление  $(\eta^{(r)}, \varphi^{(r)})$  (причем для идеальной изотропной поверхности – по соотношениям (4.2.13)), после чего присваиваем  $\eta = \eta^{(r)}$ ,  $\varphi = \varphi^{(r)}$ ,  $\tau = \tau_0$  и переходим на моделирование свободного пробега фотона – операцию 9 алгоритма.

14) Конец траектории. Присваиваем новые значения счетчиков:  $\xi_1^\downarrow(\tau^*) := \xi_1^\downarrow(\tau^*) + \xi^\downarrow(\tau^*)$ ;  $\xi_1^\uparrow(\tau^*) := \xi_1^\uparrow(\tau^*) + \xi^\uparrow(\tau^*)$ ;  $\xi_2^\downarrow(\tau^*) := \xi_2^\downarrow(\tau^*) + (\xi^\downarrow(\tau^*))^2$ ;  $\xi_2^\uparrow(\tau^*) := \xi_2^\uparrow(\tau^*) + (\xi^\uparrow(\tau^*))^2$ .

15) Анализ продолжения вычислений. Если  $m > M$ , то конец вычислений – переход на операцию 16 алгоритма. Иначе, если  $m$  не кратно  $M_1$ , то безусловное продолжение вычислений: присвоение  $m := m + 1$  и переход на начало новой траектории – операцию 7 алгоритма. Если  $m$  кратно  $M_1$ , то вычисляем промежуточные значения потоков  $F^\downarrow(\tau^*)$ ,  $F^\uparrow(\tau^*)$  и их СКО  $s(F^\downarrow(\tau^*))$ ,  $s(F^\uparrow(\tau^*))$  по формулам (4.2.18)-(4.2.22) с заменой  $M$  на  $m$ . Если и  $s(F^\downarrow(\tau^*)) / F^\downarrow(\tau^*) < d$ , и  $s(F^\uparrow(\tau^*)) / F^\uparrow(\tau^*) < d$ , то окончание вычислений –



переход на операцию 16) алгоритма. Иначе (если хотя бы одно из отношений больше  $d$ ) – продолжение вычислений, присвоение  $m := m + 1$  и переход на операцию 7 алгоритма.

16) Конец вычислений. Получаем окончательные значения потоков и их СКО по формулам (4.2.18)-(4.2.22) с заменой  $M$  на  $m$ .

#### **Случай независимости потока от азимута**

Если КСЯ поверхности не содержит азимутальной зависимости, то она отсутствует и для полусферических потоков. Это легко понять на примере потока прямого излучения: для него поле отраженного от поверхности излучения будет обладать симметрией вращения относительно вертикальной оси (см. также раздел 2.4 о разложении по азимутальным гармоникам). Тогда можно вообще убрать координату “азимут” из приведенного выше алгоритма, а соответствующий косинус в формуле (4.2.9) при расчете нового направления фотона просто выбирать как  $2\pi r$ , где  $r$  – случайное число. В частности, указанная независимость от азимута справедлива для идеального зеркального и изотропного отражения.

#### **Прямое моделирование и его недостатки**

Рассмотренная выше схема вычисления полусферических потоков по ММК называется “прямое моделирование”, поскольку в ней все элементарные процессы при переносе излучения моделируются непосредственно – “напрямую”. Как уже отмечалось выше, главным недостатком ММК является наличие в результатах вычислений случайной погрешности. Поэтому в плане дальнейшей модификации ММК, главной целью становится именно уменьшение данной погрешности.

Общая идея здесь очень проста: надо уменьшить разброс значений, записываемых в счетчики на каждой траектории ( $\xi^\downarrow(\tau^*)$  и  $\xi^\uparrow(\tau^*)$ ). Тогда, соответственно, уменьшится дисперсия (4.2.20) и (4.2.21) и СКО результата (4.2.22). При прямом моделировании в счетчики записываются единицы, т.е. разброс значений  $\xi^\downarrow(\tau^*)$  и  $\xi^\uparrow(\tau^*)$  будет обусловлен целыми числами, что наименее оптимально. Поэтому перейдем от бесхитростного прямого моделирования к схемам ММК, в которых в счетчики будут записываться уже вещественные числа.

#### **Весовое моделирование**

Первый шаг в указанном направлении элементарен. При каждом моделировании взаимодействия излучения с атмосферой мы точно знаем, какая часть энергии рассеивается, а какая поглощается:  $\Lambda$  и  $1 - \Lambda$ , соответственно. Допустим, что фотон может делиться на части (это ведь математический, модельный объект). Тогда часть фотона, равная  $1 - \Lambda$ , поглощается, а часть, равная  $\Lambda$ , рассеивается, то есть для нее моделирование траектории продолжается.

Для реализации указанного приема введем вес фотона  $w$ . Его можно рассматривать как еще одну (обобщенную) координату фотона наряду с геометрическими  $\tau$ ,  $\eta$  и  $\varphi$ . В начале каждой траектории (операция 8 алгоритма) присвоим  $w = 1$ . Далее при каждом взаимодействии фотона с атмосферой (операция 12 алгоритма) альтернативу “рассеяние-поглощение” моделировать не будем, а просто присвоим  $w := w\Lambda$  и далее безусловно перейдем на моделирование угла рассеяния. Аналогично при взаимодействии фотона с поверхностью (операция 13 алгоритма) альbedo есть доля отраженного излучения, поэтому, не разыгрывая альтернативу “отражение-поглощение”,

сразу присваиваем  $w := wA(\eta, \varphi)$  и затем моделируем направление отражения. В счетчики потоков теперь записывается не единица, а текущий вес фотона  $w$ , т.е. в операции 10 алгоритма имеем  $\xi^\downarrow(\tau^*) := \xi^\downarrow(\tau^*) + w$  и  $\xi^\uparrow(\tau^*) := \xi^\uparrow(\tau^*) + w$ .

Таким образом, при весовом моделировании уменьшение дисперсии достигается записью в счетчики не целого числа – единицы, а вещественного – веса фотона  $w$ , причем всегда  $w \leq 1$ . Траектория фотона при весовом моделировании не может оборваться из-за поглощения фотона: ее концом теперь служит только его вылет через верхнюю границу атмосферы (операция 11 алгоритма).

### Моделирование “без вылета”

Пусть перед моделированием свободного пробега (операция 9 алгоритма) фотон находится на оптической глубине  $\tau$  и движется вверх ( $\eta < 0$ ). Тогда на основании закона Бугера можно утверждать, что доля фотона, равная  $p^\uparrow = \exp(-\tau/|\eta|)$ , достигнет верхней границы атмосферы и вылетит через нее. Но это позволяет записать ее в счетчик (все счетчики) восходящего потока, если (для которых)  $\tau^* > \tau$ . Таким образом, в операции 9 алгоритма до моделирования свободного пробега сразу присваиваем  $\xi^\uparrow(\tau^*) := \xi^\uparrow(\tau^*) + wp^\uparrow$ , а в операции 10 этого присваивания уже не делаем. После записи в счетчик пересчитаем вес фотона, учитывая в нем лишь оставшуюся часть:  $w := w(1 - p^\uparrow)$ .

Далее необходимо моделировать свободный пробег фотона. Однако теперь мы уже учли его “улетевшую” часть. Поэтому оставшая часть обязана остаться в атмосфере, т.е. ее свободный пробег  $\Delta\tau$  должен лежать в интервале  $[0, \tau]$ . Этого легко достичь нормировкой плотности вероятности (4.2.1), рассматривая вместо нее соотношение

$$\rho_\tau^\uparrow(\Delta\tau) = \frac{\exp(-\Delta\tau/|\eta|)}{\int_0^\tau \exp(-\tau'/|\eta|) d\tau'}, \quad (4.3.1)$$

то есть

$$\rho_\tau^\uparrow(\Delta\tau) = \frac{1}{|\eta|(1 - p^\uparrow)} \exp(-\Delta\tau/|\eta|), \quad (4.3.2)$$

где значение  $p^\uparrow$  определено выше:  $p^\uparrow = \exp(-\tau/|\eta|)$ . После интегрирования (4.3.2) по (4.1.2) получаем модель свободного пробега фотона без вылета через верхнюю границу

$$\Delta\tau = -\eta \ln(1 - r(1 - p^\uparrow)). \quad (4.3.3)$$

### Принудительный обрыв траектории фотона

Если используется весовое моделирование (“без поглощения”) и с невылетом через верхнюю границу атмосферы, то траектория фотона вообще никогда не может закончиться. Поэтому ее надо обрывать принудительно. Здесь возможны два подхода.

Первый – обрыв по заданной кратности взаимодействия. Задается максимально допустимое число рассеяний в атмосфере и отражений от поверхности. Как только оно превышено – траектория обрывается. Технически это достигается введением в схему алгоритма счетчика взаимодействий с нулевым значением в начале траектории и прибавлением единицы при каждом взаимодействии с атмосферой и поверхностью (операции 12 и 13 алгоритма). После увеличения значения счетчика (в рамках указанных операций) оно сразу

же сравнивается с максимально допустимым значением: при наступлении превышения – траектория фотона обрывается (переход на операцию 14 алгоритма). Отметим, что этот подход согласуется с аналогичным прекращением итераций в МПР (раздел 2.5). Поэтому он может быть полезен при сравнении результатов расчетов по МПР и ММК.

Второй подход – обрыв траектории по весу фотона. Задается минимальное значение веса фотона. При каждом пересчете веса (а он может лишь уменьшаться) в операциях 9, 12, 13 алгоритма он сразу же сравнивается с минимальным и если становится меньше его – траектория обрывается (переход на операцию 14 алгоритма). Здесь необходимо обратить внимание, что параметр обрыва (минимальный вес) желательно согласовывать с заданной относительной точностью вычислений  $d$  (операция 4 алгоритма), т.е. задавать его в виде  $\delta d$ , где значение  $\delta$  стандартно выбирается в диапазоне 0.01–0.001.

Разумеется, возможен (и желателен в компьютерных кодах, предназначенных для практических вычислений) и комбинированный подход, когда задаются оба параметра обрыва: если не достигается обрыв траектории по минимальному весу (это вообще-то нежелательно), то траектория обрывается по максимальному числу взаимодействий.

#### **Моделирование “без вылета” при движении к поверхности**

Выше мы рассмотрели моделирование “без вылета” при движении фотона вверх. Однако аналогичными рассуждениями можно получить такую же схему и при движении фотона вниз, т.е. к поверхности. Она применяется значительно реже, но может быть полезна для задач, где требуется детальное изучение влияния на поле излучения именно отражения от поверхности.

Пусть фотон находится на оптической глубине  $\tau$  и движется вниз ( $\eta > 0$ ). Тогда его часть, равная  $p^\downarrow = \exp(-(\tau_0 - \tau)/\eta)$ , достигает поверхности, а часть, равная  $1 - p^\downarrow$ , остается в атмосфере. До моделирования свободного пробега фотона записываем в счетчик (счетчики) нисходящего потока при  $\tau^* > \tau$ :  $\xi^\downarrow(\tau^*) := \xi^\downarrow(\tau) + wp^\downarrow$ , вес фотона пересчитываем  $w := w(1 - p^\downarrow)$ , после моделирования свободного пробега запись в счетчики не производим.

Теперь для оставшейся части фотона надо обеспечить свободный пробег  $\Delta\tau$  в интервале  $[0, \tau_0 - \tau]$ , для чего нормируем плотность распределения (4.2.1)

$$\rho_\tau^\downarrow(\Delta\tau) = \frac{\exp(-\Delta\tau/\eta)}{\int_0^{\tau_0 - \tau} \exp(-\tau'/\eta) d\tau'} \quad (4.3.4)$$

и получаем

$$\rho_\tau^\downarrow(\Delta\tau) = \frac{1}{\eta(1 - p^\downarrow)} \exp(-\Delta\tau/\eta), \quad (4.3.5)$$

а затем для моделирования свободного пробега фотона имеем соотношение

$$\Delta\tau = -\eta \ln(1 - r(1 - p^\downarrow)). \quad (4.3.6)$$

Однако в отличие от моделирования при движении фотона вверх получение соотношения (4.3.6) еще не означает конец траектории. Там часть фотона, вылетающая через верхнюю границу атмосферы, пропадала навсегда. Но здесь эта часть попадает на поверхность, следовательно, необходимо моделировать ее дальнейшее отражение и продолжение траектории.

Технически это достигается организацией “очереди отражения”. Продолжим моделирование траектории для оставшейся в атмосфере части

фотона, но координаты  $(\eta, \varphi)$  части, достигшей поверхности, и пересчитанный вес  $w := w p^\downarrow$  сохраним в специальном массиве. После обрыва траектории фотона, оставшегося в атмосфере (а до этого события могут произойти новые записи в очередь отражения), начинаем моделирование не от верхней границы, а из этой очереди (с операции 13 алгоритма). И так далее до полного исчерпания очереди отражения, что неизбежно произойдет вследствие постоянного уменьшения веса фотона. Очередь отражения удобно организовывать по принципу стека (“первым пришел – последним ушел”), т.е. извлекать из очереди последний из записанных в нее фотонов.

### **Предварительный расчет нисходящего потока прямого излучения**

Отметим теперь одну совсем элементарную возможность уменьшения случайной погрешности расчетов по ММК. Для нисходящих потоков можно точно вычислить компоненту прямого излучения по закону Бугера, а именно:  $F_d^\downarrow(\tau^*) = F_0 \eta_0 \exp(-\tau^*/\eta_0)$ . Тогда при расчетах по ММК прямое излучение в счетчики записывать не следует, вычисляя только рассеянное и отраженное  $F_s^\downarrow(\tau^*)$ . После вычислений общий результат найдется как сумма  $F_d^\downarrow(\tau^*)$  и расчетов по ММК:  $F^\downarrow(\tau^*) = F_d^\downarrow(\tau^*) + F_s^\downarrow(\tau^*)$ . Технически пропуск прямого излучения достигается подсчетом числа рассеяний и отражений фотона и пропуском записи в счетчики (10-я операция алгоритма), если это число оказывается равным нулю (как и в начале траектории – операция 8 алгоритма).

Описанный прием позволяет уменьшить случайную погрешность нисходящих потоков  $F^\downarrow(\tau^*)$ , поскольку она теперь будет связана лишь с компонентой  $F_s^\downarrow(\tau^*)$ .

### **Простая локальная оценка (ПЛО) для потока**

Обратим теперь внимание, что аналогичным образом мы всегда можем записывать в счетчики долю прямого излучения. Действительно, фотон имеет смысл энергии излучения не только в начале траектории при старте с верхней границы атмосферы, но и далее, при всех его последующих блужданиях. Пусть фотон имеет вес  $w$  и находится на оптической глубине  $\tau$  с косинусом зенитного угла  $\eta$ . Тогда при  $\eta > 0$  для счетчика с  $\tau^* > \tau$  мы по закону Бугера имеем энергию фотона в счетчике  $w \exp(-(\tau^* - \tau)/\eta)$ . Эта же величина аналогично получается и при  $\eta < 0$  для  $\tau^* < \tau$ . Запишем это (точное!) значение в счетчики, а уже потом будем моделировать свободный пробег фотона.

Итак, теперь запись в счетчики производится не после, а до моделирования свободного пробега фотона:

$$\begin{aligned} \xi^\downarrow(\tau^*) &:= \xi^\downarrow(\tau^*) + w \exp(-(\tau^* - \tau)/\eta), \text{ если } \eta > 0 \text{ и } \tau^* > \tau; \\ \xi^\uparrow(\tau^*) &:= \xi^\uparrow(\tau^*) + w \exp(-(\tau^* - \tau)/\eta), \text{ если } \eta < 0 \text{ и } \tau^* < \tau, \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

т.е. операции 10 и 9 алгоритма меняются местами. Отметим, что мы фактически уже неявно использовали ПЛО при моделировании “без вылета” при движении фотона к верхней границе атмосферы и поверхности, записывая в счетчики долю фотона, выбывающую из атмосферы. Теперь в этих схемах в счетчики достаточно производить только запись (4.3.7), но, разумеется, до пересчета веса фотона  $w$  (т.е. сначала (4.3.7), потом пересчет веса на долю, оставшуюся в атмосфере, затем – моделирование свободного пробега).

Заметим, что экспонента в выражениях (4.3.7) есть вероятность попадания фотона в счетчики. Прием записи в счетчик вероятности (или

плотности вероятности) попадания в него фотона до собственно моделирования траектории и называется простой локальной оценкой (ПЛО). В данном случае выражения (4.3.7) есть конкретная ПЛО для полусферических потоков. Легко понять, что использование ПЛО направлено на дальнейшее уменьшение разброса записываемых в счетчики значений (формула (4.3.7) вместо простого значения  $w$ ) и, следовательно, на уменьшение случайной погрешности расчетов по ММК.

#### **Задание на модификацию схемы алгоритма**

Теперь пришла пора заменить приведенную в начале данного раздела схему алгоритма расчета полусферических потоков по ММК (с прямым моделированием) на более эффективную схему. Предлагаем читателям выполнить указанную модификацию самостоятельно в качестве упражнения. Рекомендуется учесть все описанные возможности (весовое моделирование, без вылета, в том числе при движении к поверхности, ПЛО). Для выбора конкретных особенностей (например, применять или нет моделирование без вылета при движении фотона к поверхности) использовать соответствующие входные параметры – логические переключатели.

### **4.4. Расчет интенсивности рассеянного солнечного излучения**

#### **От расчета потоков – к расчету интенсивностей**

Продолжая изучение ММК, рассмотрим возможности и особенности расчета интенсивности рассеянного солнечного излучения.

Пусть требуется рассчитать указанную интенсивность на оптической глубине  $\tau^*$  для косинуса зенитного угла и азимута направления излучения  $\eta^*$ ,  $\varphi^*$ , т.е. величины  $I(\tau^*, \eta^*, \varphi^*)$ . Поступим следующим образом. Опишем вокруг направления  $(\eta^*, \varphi^*)$  конус, т.е. будем рассматривать все направления в пределах  $(\eta^* \pm \Delta\eta^*, \varphi^* \pm \Delta\varphi^*)$ . Далее моделируем траектории фотонов так же, как для потоков (с весами, при желании “без вылета”). Но теперь введем счетчик для интенсивности  $\xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*)$ , в который будем производить запись, если фотон пересекает уровень  $\tau^*$  с координатами, лежащими в диапазонах  $\eta^* - \Delta\eta^* \leq \eta \leq \eta^* + \Delta\eta^*$  и  $\varphi^* - \Delta\varphi^* \leq \varphi \leq \varphi^* + \Delta\varphi^*$ . Здесь следует учесть, что если для полусферического потока мы записывали в счетчик вес фотона  $w$ , то для интенсивности, согласно формуле ее связи с потоком (1.1.13), следует записывать величину  $w/|\eta|$ . Таким образом, выбирая достаточно малые пределы  $\Delta\eta^*$  и  $\Delta\varphi^*$ , мы получим в счетчике оценку для интенсивности, перевод которой в единицы энергии осуществляется по соотношениям, аналогичным (4.2.18).

Эта схема моделирования интенсивности на практике неэффективна и никогда не используется, поскольку чем меньше  $\Delta\eta^*$  и  $\Delta\varphi^*$ , тем меньше фотонов будет попадать в счетчик. Решение проблемы состоит в переходе к ПЛО.

#### **Простая локальная оценка для интенсивности. Случай рассеяния**

Пусть фотон имеет вес  $w$  и координаты  $(\tau, \eta, \varphi)$ . Из трактовки индикатрисы рассеяния как плотности вероятности (раздел 4.2.) следует, что вероятность попадания фотона после рассеяния на оптической глубине  $\tau$  в “нужный” телесный угол  $(\eta^* \pm \Delta\eta^*, \varphi^* \pm \Delta\varphi^*)$  равна интегралу от индикатрисы

по этому телесному углу. Устремляя диапазоны  $\Delta\eta^*$  и  $\Delta\varphi^*$  к нулю, находим, что указанная вероятность просто переходит в плотность вероятности, т.е. в значение индикатрисы (с учетом нормировки), которое еще надо помножить на вероятность достижения фотоном оптической глубины  $\tau^*$ . В итоге получаем ПЛО для интенсивности излучения

$$\xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) := \xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) + w \frac{x(\tau, \chi)}{4\pi |\eta^*|} \exp(-|(\tau - \tau^*)/\eta^*|),$$

$$\chi = \eta\eta^* + \sqrt{(1-\eta^2)(1-(\eta^*)^2)} \cos(\varphi - \varphi^*). \quad (4.4.1)$$

В (4.4.1) деление на  $4\pi$  является следствием условия нормировки для индикатрисы (см. раздел 2.1), а необходимость деления на  $|\eta^*|$  обсуждалась выше. Запись в счетчик (4.4.1) возможна не всегда, а только если фотон в принципе способен его достичь после рассеяния, т.е. конкретно: если  $\tau^* > \tau$  и  $\eta^* > 0$  или  $\tau^* < \tau$  и  $\eta^* < 0$ .

#### Простая локальная оценка для интенсивности. Случай отражения

Для фотона, стартующего с поверхности, роль индикатрисы будет играть нормированный двунаправленный коэффициент отражения  $\rho^{(r)}(\eta, \eta^{(r)}, \varphi, \varphi^{(r)})$  (4.2.16). Поэтому для отражения от поверхности получаем ПЛО

$$\xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) := \xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) + w \frac{\rho^{(r)}(\eta, |\eta^*|, \varphi, \varphi^*)}{|\eta^*|} \exp(-|(\tau_0 - \tau^*)/\eta^*|), \quad (4.4.2)$$

где  $(\eta, \varphi)$  – направление падающего излучения (запись (4.4.2) возможна лишь для счетчиков с  $\eta^* < 0$ ).

Как и ранее, рассмотрим отдельно два важных частных случая отражения.

Идеальное изотропное отражение. Для него следует использовать выражение отраженной интенсивности через нисходящий поток (1.4.7)

$I(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\pi} AF^\downarrow$ . Замена угла на косинус в данном конкретном(!) случае правую часть соотношения не меняет, что приводит к ПЛО

$$\xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) := \xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) + w \frac{1}{\pi} \exp(-|(\tau_0 - \tau^*)/\eta^*|). \quad (4.4.3)$$

Идеальное зеркальное отражение. В этом случае имеется проблема. Как отмечено в разделе 4.2, это детерминированный процесс: ему не может быть приписана индикатриса отражения, имеющая смысл плотности вероятности (реально индикатриса такого отражения является дельта-функцией). Для нахождения ПЛО учтем, что перед попаданием на поверхность фотон должен рассеиваться так, чтобы его направление движения к поверхности было  $(-\eta^*, \varphi^*)$ . Тогда после отражения он непременно попадет в нужный счетчик  $\xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*)$  (с  $\eta^* < 0$ ). Далее рассуждая аналогично выводу ПЛО для рассеяния (4.4.1), получаем ПЛО для идеального зеркального отражения

$$\xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) := \xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) +$$

$$+ w \frac{x(\tau, \chi')}{4\pi |\eta^*|} \exp(-|(\tau_0 - \tau)/\eta^*|) r(|\eta^*|) \exp(-|(\tau_0 - \tau^*)/\eta^*|),$$

$$\chi' = -\eta^* \eta + \sqrt{(1-\eta^2)(1-(\eta^*)^2)} \cos(\varphi - \varphi^*), \quad (4.4.4)$$

где  $w, \tau, \eta, \varphi$  – координаты точки взаимодействия фотона с атмосферой, непосредственно после которого при моделировании свободного пробега он достиг поверхности,  $r(|\eta^*|)$  – коэффициент отражения (1.4.6). Запись в счетчик по (4.4.4) (при  $\eta^* < 0$ ) теперь производится до моделирования отражения, т.е. до пересчета веса фотона умножением на коэффициент отражения  $r(|\eta^*|)$ . Рассуждая подобным образом, получим, что запись в счетчик ПЛО для зеркального отражения (4.4.4) можно производить при каждом акте рассеяния, а не только тогда, когда фотон попал на поверхность. Действительно, присвоение (4.4.4) является аналогом присвоения (4.4.1) для плотности вероятности попадания в приемник через зеркально отражающую поверхность. Таким образом, для идеального зеркального отражения запись в счетчики при рассеянии (до моделирования нового направления фотона) производится дважды: с ПЛО (4.1.1) и с ПЛО (4.4.4), а при моделировании отражения запись в счетчики не производится никогда.

### Схема алгоритма расчета интенсивностей

Теперь несложно модифицировать схему алгоритма расчета потоков на случай расчета интенсивностей (или, при необходимости, совместного расчета потоков и интенсивностей).

Вначале задаются координаты  $(\tau^*, \eta^*, \varphi^*)$  и соответствующие им счетчики для интенсивности  $\xi_1(\tau^*, \eta^*, \varphi^*)$  и ее квадрата  $\xi_2(\tau^*, \eta^*, \varphi^*)$  с глобальными нулевыми начальными значениями, а также для траектории  $\xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*)$  с локальным обнулением на старте каждой траектории. Как уже отмечалось, в ММК удобно проводить вычисления сразу для всего набора (массива) требуемых координат  $(\tau^*, \eta^*, \varphi^*)$ .

Далее моделируются траектории фотонов по любой из схем, рассмотренных в разделе 4.3 (хотя бы и прямым моделированием). Здесь отметим важную особенность ММК: моделирование траектории фотона и запись в счетчики является отдельным процессом (хотя и взаимосвязанным). Перед каждым моделированием нового направления рассеяния (после пересчета веса!) производится запись в счетчики с ПЛО (4.4.1), а перед каждым моделированием нового направления отражения (после пересчета веса) – в счетчики с ПЛО (4.4.2) и (4.4.3). Особый случай представляет идеальное зеркальное отражение: для него условия записи в счетчики с ПЛО (4.4.4) изложены выше.

В конце каждой траектории производится запись в глобальные счетчики

$$\begin{aligned}\xi_1(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) &:= \xi_1(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) + \xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*), \\ \xi_2(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) &:= \xi_2(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) + (\xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*))^2.\end{aligned}\quad (4.4.5)$$

После окончания цикла по  $m$  траекториям (по заданной точности или их максимальному числу) вычисляются искомые интенсивности и их СКО по соотношениям, аналогичным (4.2.18), (4.2.21) и (4.2.22)

$$\begin{aligned}I(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) &= F_0 \eta_0 \xi_1(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) / m, \\ \mathbf{D}(\xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*)) &= \frac{1}{m} \xi_2(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) - \left( \frac{1}{m} \xi_1(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) \right)^2, \\ s(I(\tau^*, \eta^*, \varphi^*)) &= F_0 \eta_0 \sqrt{\mathbf{D}(\xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*))} / m.\end{aligned}\quad (4.4.6)$$

### Двойная локальная оценка (ДЛО)

В отличие от расчета потоков, где ПЛО (4.3.7) безусловно снижала случайную погрешность, ПЛО для интенсивности вида (4.4.1) может, наоборот, существенно ее увеличить. Здесь разброс записываемых в счетчики значений определяется различными значениями индикатрисы при разных углах рассеяния и может достигать нескольких порядков, если индикатриса является сильно вытянутой (а именно таковы индикатрисы в видимой области спектра при достаточной концентрации в атмосфере аэрозолей – см. [1,2]). Для уменьшения указанного разброса предлагается использовать двойную локальную оценку (ДЛО).

Будем рассуждать так. Пусть фотон после рассеяния в исходной точке попадает в счетчик не сразу, а испытывает еще одно рассеяние в промежуточной точке на оптической глубине  $\tau'$ . Тогда после перемножения соответствующих плотностей вероятности (две ПЛО вида (4.4.1)) мы получаем ДЛО для интенсивности при рассеянии

$$\begin{aligned} \xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) &:= \xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) + \\ &+ \frac{w}{|\eta^*|} \frac{x(\tau, \chi_1)}{4\pi} \exp(-|\tau - \tau'|/\eta') \Lambda(\tau') \frac{x(\tau', \chi_2)}{4\pi} \exp(-|\tau - \tau^*|/\eta^*), \\ \chi_1 &= \eta\eta' + \sqrt{(1-\eta^2)(1-(\eta')^2)} \cos(\varphi - \varphi') \\ \chi_2 &= \eta'\eta^* + \sqrt{(1-(\eta')^2)(1-(\eta^*)^2)} \cos(\varphi' - \varphi^*). \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Уменьшение разброса записываемых в счетчики значений в ДЛО (4.4.7) осуществляется за счет перемножения индикатрис.

Выбор промежуточных координат  $(\tau', \eta', \varphi')$  для ДЛО (4.4.7) не является произвольным. Значения  $\tau'$  и  $\eta'$  следует выбирать такими, чтобы фотон безусловно попадал в счетчик. В этом важное преимущество ДЛО перед ПЛО: для ДЛО не бывает условий отсутствия записи в счетчик. Соответствующая логика выглядит достаточно громоздкой, тем не менее, для понимания сути ДЛО, изложим ее полностью.

Если (случай А)  $\tau^* > \tau$  и  $\eta^* > 0$  (первое из условий записи для ПЛО), то необходимы либо  $\tau < \tau' < \tau^*$  и  $\eta' > 0$ , либо  $0 < \tau' < \tau$  и  $\eta' < 0$ . Для случайного выбора (по суммарному условию  $0 < \tau' < \tau^*$ ) имеем  $\tau' = r_1 \tau^*$ . Далее: если  $\tau' < \tau$ , то  $\eta' = -r_2$ ; если  $\tau' > \tau$ , то  $\eta' = r_2$  (здесь и далее  $r_1$  и  $r_2$  – это случайные числа). Если (случай В)  $\tau^* < \tau$  и  $\eta^* < 0$  (второе из условий записи для ПЛО), то по аналогии необходимы либо  $\tau^* < \tau' < \tau$  и  $\eta' < 0$ , либо  $\tau_0 < \tau' < \tau^*$  и  $\eta' > 0$ , вследствие чего оказывается  $\tau' = \tau_0 + r_1(\tau_0 - \tau^*)$ . Далее если  $\tau' > \tau$ , то  $\eta' = -r_2$ , если  $\tau' < \tau$ , то  $\eta' = r_2$ . Если (случай С)  $\tau^* > \tau$  и  $\eta^* < 0$  (нет записи для ПЛО), то необходимы  $\tau_0 < \tau' < \tau^*$  и  $\eta' > 0$ , поэтому  $\tau' = \tau_0 + r_1(\tau_0 - \tau^*)$  и  $\eta' = r_2$ . Наконец, если (случай D)  $\tau^* < \tau$  и  $\eta^* > 0$  (нет записи для ПЛО), то необходимы  $0 < \tau' < \tau^*$  и  $\eta' < 0$ , что влечет за собой  $\tau' = r_1 \tau^*$  и  $\eta' = -r_2$ . Координата  $\varphi$  во всех случаях не влияет на запись в счетчики, следовательно  $\varphi' = 2\pi r_3$  ( $r_3$  – третье случайное число).

Важно отметить, что ДЛО фактически означает учет не однократного (как в ПЛО), а двукратного рассеяния. Но тогда ДЛО нельзя использовать с самого начала моделирования, иначе будет потерян вклад в суммарный результат компоненты за счет однократного рассеяния. Поэтому при



использовании ДЛО (4.4.7), следует ввести переменную алгоритма – счетчик кратностей рассеяния – и для первого рассеяния сначала использовать ПЛО (4.4.1), а потом уже ДЛО (4.4.7). Для всех последующих рассеяний нужно использовать уже только ДЛО.

Что касается отражения от поверхности, то для него тоже возможно использование ДЛО, получаемое аналогичным перемножением двух ПЛО для отражения и рассеяния. Однако на практике ДЛО для отражения используется редко. Тем не менее, рекомендуем читателю написать соответствующие формулы для ДЛО отражения и логику выбора промежуточной точки рассеяния в них в качестве полезного упражнения для понимания ММК вообще и сути ДЛО в частности. Заметим еще раз, что ММК – это не жесткий метод, а, скорее, набор инструментов для решения различных задач. Этим он существенно отличается от методов, изложенных в главах 2 и 3. Понимание сути ММК, подкрепленное определенным опытом работы с ним, позволяет не только решать разнообразные задачи расчета полей рассеянного излучения, но и создавать собственные схемы их решения, которые будут наиболее оптимальными в каждом конкретном случае.

### **Моделирование по обратным траекториям**

В соответствии с физическим смыслом, в рассмотренной выше схеме переноса излучения перенос фотонов осуществлялся от источника (солнечного потока на верхней границе атмосферы) к счетчику, т.е. приемнику излучения. Достоинство такой схемы помимо физической наглядности состоит также в том, что возможно одновременное вычисление интенсивностей и/или потоков излучения для всех требуемых счетчиков. Однако у этой схемы имеется и существенный недостаток. Если вероятность попадания фотона в счетчик мала (например, для интенсивности нисходящего излучения вблизи верхней границы атмосферы), то разброс записываемых в него значений, и значит, случайное СКО могут оказаться очень большими. Для преодоления этого недостатка используется схема моделирования “от приемника”, иначе говоря – моделирования по обратным траекториям (также говорят “по сопряженным траекториям”). Суть этой модификации ММК может быть легко объяснена из физических соображений.

Рассмотрим, как в начале этого раздела, нереализуемую схему прямого моделирования интенсивности излучения. В ней фотоны попадают непосредственно в счетчик интенсивности. Поставим вопрос: а как блуждал фотон в атмосфере до попадания в счетчик? Он обязательно должен был взаимодействовать до этого с атмосферой или поверхностью. А до этого взаимодействия он дошел либо прямо от верхней границы атмосферы (от Солнца), либо испытал еще одно взаимодействие. И так далее. Таким образом, мы можем как бы восстановить траекторию фотона, направив его из счетчика интенсивности через блуждания в атмосфере до точки его прихода с верхней границы – от Солнца.

Началом траектории в схеме “от приемника” будет старт фотона внутри атмосферы. Далее моделируется свободный пробег фотона, причем при  $\eta < 0$  только по схеме “без вылета”, поскольку фотон обязан остаться в атмосфере или достичь поверхности. До взаимодействия фотон мог придти от верхней границы атмосферы, в этом случае мы проследили его траекторию полностью. Если же фотон испытывал до данного взаимодействия другие акты взаимодействия со средой, то вновь моделируем его свободный пробег без вылета из атмосферы и т.д. А теперь для найденных таким образом траекторий фотона используем

обычное моделирование “от источника” с ПЛО для интенсивности. Его детальное рассмотрение с учетом выражений для плотности вероятности свободного пробега и их связи с уравнением переноса излучения приводит к удивительному результату. Оказывается что для моделирования “от приемника” в рассмотренном выше алгоритме расчета интенсивности (с ПЛО или ДЛО, “без вылета”) достаточно изменить только один пункт.

Источник имеет начальные координаты  $\tau = \tau^*$ ,  $\eta = -\eta^*$ ,  $\varphi = \pi + \varphi^*$ ,  $w = 1$ , а приемник – счетчик – имеет координаты  $\tau^* = 0$ ,  $\eta^* = -\eta_0$ ,  $\varphi^* = \pi + \varphi_0$ .

Поэтому достаточно формальным образом поменять источник и приемник местами, не изменяя потока источника  $F_0 \eta_0$ . Математически эта возможность соответствует переходу к решению сопряженного уравнения переноса, а физически является следствием общего принципа обратимости оптических явлений (например, см. [1]). Однако здесь сразу же необходимо отметить, что такая простая замена источника и приемника осуществима лишь для приближения неполяризованного излучения (обобщение для поляризации будет дано в главе 6).

### **Предварительное вычисление интенсивности в приближении однократного рассеяния**

Для уменьшения случайной погрешности вычисления интенсивностей по ММК достаточно эффективен тот же прием, который был описан для потоков в разделе 4.3. Вычислим вклад однократно рассеянного излучения по явным аналитическим формулам (см. раздел 2.1, соотношения (2.1.13)) с подстановкой в них (2.1.14). Вообще говоря, эти формулы на самом деле тоже являются приближенными, поскольку в них используется численное интегрирование. Но по крайней мере, они свободны от случайной погрешности вычислений, которая является своего рода «ахиллесовой пятой» для ММК. Далее будем применять ММК для вычисления компонент рассеяния, начиная со второй и более кратности. Технически для этого достаточно ввести уже упоминавшийся выше счетчик рассеяний и не записывать в счетчики рассеянное излучение при его единичном значении. Кстати, особенно удобен этот прием для ДЛО (см. выше).

С отражением от поверхности опять же, как это свойственно ММК, возникают неопределенности. Можно учесть отражение прямого солнечного излучения от поверхности без рассеяния, а для идеально зеркальной поверхности возможен учет различных компонент отражения и рассеяния и т.п. Для таких ситуаций вновь укажем на гибкость ММК и возможность его комбинирования с другими методами.

### **Об интегрировании с апертурной аппаратной функцией. Кратная рандомизация**

Этот вопрос несколько выпадает из общего контекста данной главы. Однако в последующие главы она также не вписывается, но оказывается важной для практики расчетов. Поэтому завершим главу рассмотрением этого вопроса.

Вернемся в самое начало (раздел 1.1). Там мы отметили существенность двух интегрирований с аппаратными функциями прибора: 1) со спектральной функцией (об этом речь пойдет в следующей главе) и 2) по направлениям с функцией  $f_\Omega(\omega)$ , которая называется апертурной. Сейчас ограничимся обсуждением второго из этих интегрирований.

Пусть задана функция  $f_\Omega(\omega)$ , где  $\omega$  определяется конкретным диапазоном направлений  $(\eta^*, \varphi^*)$ , т.е. косинусов зенитных углов и азимутов

излучения. ММК предоставляет уникальную возможность вычисления интеграла с апертурной функцией непосредственно в рамках рассматриваемых алгоритмов расчета интенсивности излучения.

Рассуждение очень простое. Выше мы научились вычислять интенсивность для одного направления  $(\eta^*, \varphi^*)$ . Теперь же имеем диапазон направлений, где функция  $f_\Omega(\eta^*, \varphi^*)$  отлична от нуля. Если считать интеграл с  $f_\Omega(\eta^*, \varphi^*)$  численно (даже по простой формуле трапеций), а каждый расчет для направления  $(\eta^*, \varphi^*)$  выполнять по ММК, то такая организация вычислений будет крайне неэффективной. Альтернативной можно считать следующую схему. Если выполнять расчет для конкретных значений  $(\eta^*, \varphi^*)$  лишь для каждой траектории фотона, а сами значения  $(\eta^*, \varphi^*)$  выбирать случайным образом в соответствии с плотностью вероятности, диктуемой функцией  $f_\Omega(\eta^*, \varphi^*)$ . Тогда мы вычислим и интенсивность в атмосфере, и одновременно(!) интеграл по функции апертуры.

Это рассуждение показывает, что ММК, в сущности, все равно, какова кратность интегрирования – тройная (а это так для интенсивностей – см. раздел 2.1) или больше. Прием распространения кратности интегрирования на вычисления по траекториям в ММК известен как кратная рандомизация. С ним мы еще встретимся в последующих главах, а теперь продолжим рассмотрение интегрирования с апертурной аппаратной функцией. Превращаем функцию  $f_\Omega(\eta^*, \varphi^*)$  в плотность вероятности за счет перенормировки

$$f'_\Omega(\eta^*, \varphi^*) = \frac{f_\Omega(\eta^*, \varphi^*)}{\int_0^1 d\varphi' \int_{-1}^1 f_\Omega(\eta', \varphi') d\eta'}. \quad (4.4.8)$$

Далее перед моделированием траектории выбираем значения  $(\eta^*, \varphi^*)$  согласно плотности вероятности  $f'_\Omega(\eta^*, \varphi^*)$  (4.4.8) (см. раздел 4.2 и Приложение 11). Теперь координаты счетчика уже не константы, а меняются на каждой траектории. После вычисления интенсивности по ММК учтем, что мы получили нормированную величину

$$I = \frac{\int_\Omega I(\omega) f_\Omega(\omega) d^2\omega}{\int_\Omega f_\Omega(\omega) d^2\omega}. \quad (4.4.9)$$

Отметим, что ни один другой метод такой возможностью простого (и быстрого!) интегрирования по функции апертуры не обладает.

## 5. Спектральное интегрирование

### 5.1. Возможности прямого спектрального интегрирования

#### Проблема спектрального интегрирования

В главах 1-4 мы рассмотрели некоторые из конкретных численных методов теории переноса излучения. Напомним, что все они были сформулированы лишь для монохроматического излучения. Но для практического моделирования измерений оптическими приборами необходимо еще учитывать интегрирование со спектральной аппаратной функцией прибора (см. соотношение (1.1.15) в раздел 1.1):

$$I = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} f(\lambda') I(\lambda') d\lambda'. \quad (5.1.1)$$

При переписывании (1.1.15) в виде (5.1.1) мы для упрощения обозначений убрали индексы у спектральной аппаратной функции прибора  $f(\lambda)$  и записали интервал интегрирования в общем виде  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ .

Как уже отмечено в разделе 1.1, при вычислении соотношения (5.1.1) в общем случае возникают трудности, связанные с сильными осцилляциями монохроматической интенсивности  $I(\lambda)$  вследствие селективного молекулярного поглощения (см. подробнее [1,2]). Это выводит задачу интегрирования для соотношения (5.1.1) за рамки чисто технической и требует разработки специальных эффективных методов и алгоритмов спектрального интегрирования. Им и посвящена данная глава.

#### Предварительное дробление на подынтервалы

Прежде чем излагать конкретные методы, отметим что, ограничения на ширину интервала интегрирования  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ , явным или неявным образом присутствующие в некоторых алгоритмах, не снижают их общности, поскольку интеграл по любому, сколь угодно большому интервалу может быть разбит на сумму интегралов по требуемым малым интервалам. Поэтому всюду ниже при необходимости мы будем предполагать такое предварительное разбиение выполненным, а в качестве интервала  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  рассматривать уже малый интервал.

#### Задачи с учетом рассеяния и без него

Проблема вычисления интеграла (5.1.1) существенна для любых численных методов теории переноса излучения, как для тех, в которых учитывается рассеяние (главы 2-4), так и для тех, в которых рассеянием пренебрегается (глава 1). Однако, подходы к решению указанных различных задач сильно различаются.

Задачи без учета рассеяния стандартно возникают для теплового излучения безоблачной атмосферы в ИК и МКВ областях спектра, где как раз число линий селективного поглощения весьма большое. Исторически именно при решении этих задач и возникла проблема спектрального интегрирования. Для ее преодоления выработано немало приближенных методов, в частности различные модели полос поглощения [1,2]. Задачи с учетом рассеяния характерны для солнечного излучения в коротковолновой области спектра, где находится окно прозрачности атмосферы и, в принципе, селективным молекулярным поглощением можно пренебречь. Однако такой подход, уже следует считать устаревшим. При современных требованиях к точности

вычислений интенсивности поля рассеянного солнечного излучения пренебрегать селективным молекулярным поглощением, как правило, уже недопустимо.

Поэтому в рамках данного пособия мы, во-первых, сосредоточим внимание на общих методах спектрального интегрирования, применимых как для задач без учета рассеяния, так и с его учетом. Во-вторых, будем делать акцент на случаях учета рассеяния, т.к. они являются более сложными и менее освещенными в учебной литературе. Что же касается специальных приближенных методов для случая отсутствия рассеяния, они достаточно подробно изложены в [1,2]. Поэтому при необходимости их численная реализация может быть выполнена читателем самостоятельно на основе материала главы 1.

### **Немонохроматическое приближение**

Если интервал интегрирования  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  достаточно мал, можно пренебречь изменением на нем всех величин, кроме объемного коэффициента молекулярного поглощения.

Для задач без учета рассеяния это приводит к классическому и широко используемому приближению немонахроматической функции пропускания [1,2], когда интеграл (5.1.1) вычисляется только для отдельной функции пропускания по молекулярному поглощению (см. формулу (1.2.6)). А для всех прочих величин используются средние на интервале  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  значения. Это приводит к тому, что искомая интенсивность рассчитывается с указанными величинами (немонахроматической функцией пропускания и средними значениями) по рассматриваемому спектральному интервалу с теми же формулами и алгоритмами, что и для монохроматического случая. То есть спектральное и высотное интегрирование фактически меняются местами.

При учете рассеяния выполнить отдельное спектральное интегрирование соответствующих ядер операторов ряда Неймана (2.3.6) (см. главу 2) уже невозможно. Это однако не означает принципиальную невозможность использования для рассеянного излучения немонахроматического приближения. Все зависит от конкретных задач, спектральных интервалов и требований к точности расчетов. В алгоритме, приведенном в разделах 2.3 и 2.5, спектральному интегрированию подлежат экспоненты (они же – функции пропускания) и альбеда однократного рассеяния  $\Lambda(\tau_i)$ . Можно указать два предельных случая, когда немонахроматическое приближение для рассеянного излучения окажется достаточно точным: 1) при значительном преобладании поглощения над рассеянием ( $\Lambda(\tau_i) \rightarrow 0$ ), что в пределе дает математически корректное приближение отсутствия рассеяния, и 2) при значительном преобладании рассеяния над поглощением ( $\Lambda(\tau_i) \rightarrow 1$ ), что в пределе дает отсутствие влияния селективного поглощения.

Кстати заметим, что для рассеянного солнечного излучения источниками селективных линий поглощения могут служить не только теллурические линии атмосферных газов, но и фраунгоферовы линии спектра Солнца.

### **Интегрирование с фиксированным шагом**

Это стандартное вычисление интеграла (5.1.1) по формуле трапеций вида (1.2.9) с постоянным шагом. Его идея очень проста: если выбрать шаг по длине волны достаточно малым, то можно достичь очень высокой, эталонной точности интегрирования. При этом очевидно, что при учете отдельных

спектральных линий шаг интегрирования должен выбираться достаточно малым, чтобы хорошо “прорисовывалась” любая линия, даже самая узкая. Поэтому параметром выбора шага служит коэффициент, на который умножается минимальная (в рассматриваемом диапазоне давления и температуры) полуширина спектральной линии в интервале интегрирования [1,2]. Стандартный диапазон значений коэффициента 0.1–0.3.

С учетом возможностей современных компьютеров, такой сверхподробный метод спектрального интегрирования вполне применим для задач без рассеяния, но, как уже отмечалось, не для массовых, а для эталонных расчетов, предназначенных для тестирования более грубых приближений. Обратим внимание, что при этом для каждой длины волны следует выбирать собственную внутреннюю сетку интегрирования и обрывать вычисления по минимальному значению функции пропускания (см. раздел 1.3). Отметим еще, что указанные приемы необходимы и для всех описываемых ниже методов спектрального интегрирования.

Для задач с учетом рассеяния эта схема вполне работоспособна (для эталонных расчетов) в приближении однократного рассеяния (см. раздел 2.1). Для методов, учитывающих многократное рассеяние, ее применение проблематично, хотя и здесь все зависит от конкретики расчетов. Эти утверждения оказываются справедливыми также для двух других методов непосредственного спектрального интегрирования, рассматриваемых в данной главе.

#### **Интегрирование с учетом особенностей спектральных линий**

Недостатком рассмотренного выше подхода являлся выбор шага интегрирования лишь по параметрам одной линии, без учета особенностей остальных. Предложены различные методы оптимизации сетки интегрирования по длинам волн (с целью уменьшения числа ее узлов), учитывающие всю совокупность спектральных линий интервала. Однако в общем случае (если заранее не известна структура линий конкретного интервала) они достаточно громоздки и даже для эталонных расчетов не слишком оправданы. Приведем простейшую схему подобного метода, дав читателю на ее основе информацию для дальнейших размышлений.

Выше мы выбирали шаг как параметр, связанный с минимальной полушириной линии из интервала интегрирования. Прделаем эту процедуру, но далее учтем реальный диапазон влияния этой линии на значение объемного коэффициента молекулярного поглощения, который определяется умножением на некоторое число уже не минимальной, а максимальной (по диапазону давления и температуры условий расчета) полуширины линии. Стандартные значения такого множителя лежат в диапазоне 50–200. Таким образом, мы построим для данной линии собственную дискретную сетку длин волн с шагом, определяемым минимальной полушириной, но распространяющуюся от центра линии не на весь интервал, а лишь на конечное число шагов в обе стороны, которое зависит от максимальной полуширины линий.

После выполнения указанной процедуры построения индивидуальной сетки дискретных длин волн для каждой линии поглощения в интервале интегрирования будем рассматривать общую сетку интегрирования как объединение всех индивидуальных сеток.

Описанный выбор сетки интегрирования может дать значительную экономию времени счета, если линии расположены в интервале достаточно редко, либо между их сгущениями имеются существенные промежутки. В

интервалах с частым расположением линий, наоборот, из-за наложения сеток могут возникать слишком мелкие шаги интегрирования. Для борьбы с этим достаточно объединять соседние шаги, если их суммарная длина меньше минимального шага по всему интервалу (определяемого линией с минимальной полушириной). Эффективным приемом уменьшения узлов сетки интегрирования является также увеличение индивидуального шага для каждой линии от центра к крыльям, т.е. неравномерная дискретная сетка индивидуальной линии. В целом, как отмечено выше, в рамках указанного подхода несложно предложить различные приемы, уменьшающие число узлов спектрального интегрирования.

### Интегрирование с дроблением сетки

Приведем общий математический прием интегрирования с дроблением сетки, который на практике оказывается весьма эффективным для вычисления интегралов вида (5.1.1).

Вновь рассмотрим знакомую нам квадратурную формулу трапеций общего вида (1.2.8) для вычисления значения  $Y = \int_a^b f(x)dx$  при начальной сетке

$y_i(x_i)$ ,  $i=1, \dots, N$ ,  $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$ . Организуем вычисления следующим образом. Сначала вычислим  $Y$  по исходной сетке из  $N$  узлов. Потом разобьем каждый интервал исходной сетки пополам, получим  $2(N-1)$  узлов и вычислим интеграл по этой сетке. Поскольку узлов в ней больше, его значение будет точнее. При этом каждый узел старой сетки будет умножаться на вдвое меньший интервал, поэтому значение интеграла по новой сетке можно выразить через его значение по старой. Итерации с дроблением можно продолжать до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность вычислений. Рекомендую читателю проделать соответствующие выкладки в качестве упражнения. В результате получим следующую формулу интегрирования методом трапеций с дроблением сетки

$$Y_m = Y_{m-1} / 2 + \sum_{i=1}^{N-1} \Delta_{i,m} \sum_{k=1}^{2^{m-1}} f(x_i + (2k-1)\Delta_{i,m}),$$

$$Y_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (f(x_{i+1}) + f(x_i)) \Delta_{i,0}, \quad \Delta_{i,m} = (x_{i+1} - x_i) / 2^m. \quad (5.1.2)$$

Итерации (по индексу  $m$ ) для (5.1.2) прекращаются, когда будет достигнуто выполнение условия  $|Y_m - Y_{m-1}| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заданный параметр, определяющий точность вычислений. Вычисления по (5.1.2) очень удобны тем, что, сколько бы ни потребовалось итераций, функция  $f(x)$  вычисляется в каждой точке сетки только один раз (т.е. так же, как если бы мы сразу считали интеграл по сетке последней итерации). Более того, ее значения даже не требуется хранить в памяти компьютера.

При применении (5.1.2) для спектрального интегрирования (5.1.1) важной задачей является оптимальный выбор начальной сетки интегрирования ( $x_i$ ,  $i=1, \dots, N$ ). Очень простым, но достаточно эффективным приемом оказался выбор в качестве  $x_i$  либо длин волн центров линий поглощения в интервале интегрирования, либо длин волн посередине между центрами. Первый вариант эффективен при слабом поглощении, а второй – при сильном поглощении. В общем случае, когда сила поглощения неизвестна или может быть

произвольной, следует включать в начальную сетку интегрирования и центры линий, и средние длины волн между ними. Кроме того, в начальную сетку рекомендуется включать точки экстремумов аппаратной функции  $f(\lambda)$ , если таковые имеются.

## 5.2. k-метод

### Идея метода

Идея вычисления спектрального интеграла (5.1.1), которая реализуется в k-методе, состоит в группировке членов интегральной суммы не по порядку близости в области аргументов подынтегральной функции, а по порядку близости в области ее значений (интеграл Лебега). Поскольку осцилляции подынтегральной функции вызываются осцилляциями объемного коэффициента молекулярного поглощения, в итоге k-метод сводится к группировке слагаемых по значениям указанного коэффициента. Стандартное обозначение для него буквой  $k$  и породило название метода.

С формально-математических позиций k-метод достаточно подробно изложен в [1,2]. Поэтому в этом и следующем разделах рассмотрим k-метод с точки зрения его практической вычислительной реализации.

### Вывод соотношений k-метода из формулы численного интегрирования

Перепишем выражение (5.1.1) в виде квадратурной формулы трапеций

$$I = \sum_{l=1}^L I(\lambda_l) f(\lambda_l) d^{(\lambda)}(1, l, L), \quad (5.2.1)$$

где  $\lambda_l$ ,  $l=1, \dots, L$  – заданная сетка узлов ( $\lambda_1 = \lambda_{\min}$ ,  $\lambda_L = \lambda_{\max}$ ),  $d^{(\lambda)}(1, l, L)$  – вес каждого узла (1.2.9) с заменой  $x$  на  $\lambda$  и  $N$  на  $L$  (обозначение для веса введено в разделе 2.3).

В рамках k-метода будем всегда полагать, что вариации интенсивности  $I(\lambda_l)$  вызваны исключительно вариациями объемного коэффициента молекулярного поглощения. Иными словами, если бы указанный объемный коэффициент не зависел от длины волны, то все  $I(\lambda_l)$  были бы одинаковы. Т.е. мы неявно предполагаем, что все прочие параметры атмосферы и поверхности, определяющие интенсивность излучения, внутри интервала  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  постоянны по спектру (см. раздел 5.1 о предварительном разбиении всего интервала спектрального интегрирования на малые части). В качестве значений указанных параметров при практических расчетах следует использовать их средние величины на этих малых интервалах.

Для начала рассмотрим следующие два приближения. Во-первых, будем вычислять (5.2.1) для прямоугольной аппаратной функции ( $f(\lambda)=1$ ). Во-вторых, будем считать объемный коэффициент молекулярного поглощения  $k(\lambda_l)$  скалярной величиной в пренебрежении наличием у него зависимости от высоты в атмосфере. Иначе говоря, пренебрегая влиянием его вертикальных неоднородностей на значения  $I(\lambda_l)$ .

С учетом этих допущений соотношение (5.2.1) принимает вид

$$I = \sum_{l=1}^L I(k(\lambda_l)) d^{(\lambda)}(1, l, L). \quad (5.2.2)$$



Разобьем весь диапазон изменения  $I(k(\lambda_l))$  на  $K$  интервалов и просуммируем все  $d^{(\lambda)}(1, l, L)$  для каждого интервала. Получим (пока формально) соотношение

$$I = \sum_{k=1}^K I_k D_k, \quad (5.2.3)$$

где  $I_k$  – средние значения интенсивности на интервале с номером  $K$ ;  $D_k$  – соответствующие им суммы весов  $d^{(\lambda)}(1, l, L)$ .

Однако переход от (5.2.2) к (5.2.3) ничего не дает в плане ускорения вычислений, поскольку для нахождения  $D_k$  придется все равно вычислять все  $I(k(\lambda_l))$ . Поэтому делаем следующий шаг. Поскольку  $I(k(\lambda_l))$  зависят только от  $k(\lambda_l)$ , полагаем, что  $D_k$  можно находить по разбиению на интервалы именно диапазона изменений на  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  объемного коэффициента молекулярного поглощения  $k(\lambda_l)$ . Поэтому можно записать

$$I = \sum_{k=1}^K I(k_k) D_k, \quad (5.2.4)$$

где  $k_k = (k'_k + k'_{k+1})/2$  – средние значения объемного коэффициента молекулярного поглощения в  $K$  интервалах, образующих сетку его разбиения  $k'_m$ ,  $m=1, \dots, K+1$ , а для вычисления  $D_k$  получаем последовательные соотношения

$$\begin{aligned} D_k &= 0, \quad k=1, \dots, K; \\ D_k &:= D_k + d^{(\lambda)}(1, l, L), \quad \text{если } k'_k \leq k(\lambda_l) < k'_{k+1} \quad (\text{для } k=K \text{ условие } \\ &k'_K \leq k(\lambda_l)), \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

в которых “:=” является оператором присваивания, введенным в разделе 2.3.

### **О выборе сеток интегрирования**

Соотношения  $k$ -метода (5.2.4) и (5.2.5) остаются формальными до тех пор, пока не освещены вопросы выбора сетки спектрального интегрирования в формуле (5.2.2) и сетки разбиения объемного коэффициента молекулярного поглощения  $k'_m$ ,  $m=1, \dots, K+1$ .

Очевидно, что спектральную сетку  $\lambda_l$ ,  $l=1, \dots, L$  разумнее выбирать так, чтобы учесть влияние каждой линии поглощения. Поэтому следует использовать приемы ее выбора, описанные в разделе 5.1. Желательно, чтобы сетка включала все длины волн центров линий.

Выбор сетки объемного коэффициента молекулярного поглощения начинают с определения минимального и максимального его значения на интервале интегрирования:  $k_{\min} = \min(k(\lambda_l))$ ,  $k_{\max} = \max(k(\lambda_l))$ ,  $l=1, \dots, L$ . Далее интервал  $[k_{\min}, k_{\max}]$  делится на  $K$  частей, количество которых обычно порядка десяти. О критериях выбора значения  $K$  скажем чуть ниже. Обычно при делении просто используют равные интервалы (тогда  $k'_m = k_{\min} + (m-1) \frac{k_{\max} - k_{\min}}{K}$ ,  $m=1, \dots, K+1$ ). Но более разумно проводить анализ гистограммы распределения значений  $k(\lambda_l)$  и выбирать более мелкие интервалы в области ее максимума. Кроме того, при значительных вариациях  $k(\lambda_l)$  может оказаться полезной логарифмическая шкала расположения узлов

$k'_m$ . Указав на различные возможности выбора указанной сетки, будем записывать ее в общем виде как  $k'_m$ ,  $m=1, \dots, K+1$ .

#### **Схема алгоритма определения параметров k-метода**

Теперь легко написать практическую последовательность операций для нахождения набора величин  $k_k$  и  $D_k$ ,  $k=1, \dots, K$ , которые и определяют k-метод согласно соотношению (5.2.4).

1) Для заданного спектрального интервала  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  строим сетку по длинам волн  $\lambda_l$ ,  $l=1, \dots, L$  (см. раздел 5.1).

2) На этой сетке вычисляем значения объемного коэффициента молекулярного поглощения  $k(\lambda_l)$ . Они определяются моделью атмосферы [1,2], а о приведении ее к вертикально-однородной будет сказано ниже. Отметим, что сама по себе задача расчета значений  $k(\lambda_l)$  не является элементарной, поскольку подразумевает суммирование вклада различных линий на одной длине волны  $\lambda_l$ . Для оптимального вычисления указанной суммы существуют специальные приемы и методы, однако их рассмотрение выходит за рамки тематики данного учебного пособия.

3) Находим  $k_{\min} = \min(k(\lambda_l))$ ,  $k_{\max} = \max(k(\lambda_l))$ ,  $l=1, \dots, L$ , строим сетку  $k'_m$ ,  $m=1, \dots, K+1$  (см. выше) и находим центральные значения интервалов  $k_k = (k'_k + k'_{k+1})/2$ ,  $k=1, \dots, K$ .

4) Перебирая все  $k(\lambda_l)$ ,  $l=1, \dots, L$  по формуле (5.2.5) находим значения  $D_k$ , при этом для поиска номера интервала  $k$ , удовлетворяющего условию  $k'_k \leq k(\lambda_l) < k'_{k+1}$ , удобно использовать алгоритм из Приложения 1.

5) На выходе алгоритма имеем набор  $k_k$  и  $D_k$ ,  $k=1, \dots, K$ .

#### **О точности k-метода**

Следует указать, что при построении схемы k-метода (5.2.2)-(5.2.5) мы помимо двух открыто заявленных приближений использовали и ряд других, скрытых приближений. Например, зависимость интенсивности излучения от объемного коэффициента молекулярного поглощения является нелинейной, поэтому переход от соотношения (5.2.3) к (5.2.4) математически некорректен, т.к. в них величины  $D_k$  являются различными. С другой стороны, после выбора интервалов разбиения по объемному коэффициенту следовало бы находить значения  $D_k$ , соответствующие границам этих интервалов, а не использовать исходную сетку по длинам волн.

Заметим, однако, что k-метод, как и любые другие численные методы является приближенным. В пределе при  $L \rightarrow \infty$  и  $K \rightarrow \infty$  мы получили бы точное значение интегралов, а вот выбор любых конечных разбиений интервалов интегрирования уже служит источником погрешности. Причем это главный ее источник. Поэтому, в конечном счете, все определяется конкретным выбором  $L$  и  $K$ , а все остальные допущенные неточности являются второстепенными, и на них вообще можно не обращать внимания.

Выбору спектральной сетки и значения  $L$  был посвящен раздел 5.1, поэтому здесь остановимся на особенностях выбора значения  $K$ .

Как отмечено выше, обычно число  $K$  выбирают в диапазоне 5–10 [2]. Критерий такого выбора очень прост: при расчетах для стандартных моделей

полос поглощения получают примерно такие значения. Т.е. это выбор по аналогии. Разумеется, выбрав  $K$  и получив набор параметров  $k$ -метода, следует сравнить расчеты по нему с некими эталонными (см. раздел 5.1). Практика как раз и показывает, что значения  $K$  порядка десяти, как правило, обеспечивает требуемую точность  $k$ -метода. В противном случае следует взять большее значение и вновь сверить расчеты с эталонными результатами. В принципе, возможен контроль точности и внутри собственно  $k$ -метода: для этого надо последовательно увеличивать значения  $K$  до тех пор, пока результаты расчетов по  $k$ -методу перестанут значимо различаться.

### **Возможности приближенного учета вертикальной неоднородности атмосферы**

Выше, при выводе соотношений  $k$ -метода (5.2.4) и (5.2.5), были сделаны два приближения. Предполагалось, что аппаратная функция имеет прямоугольный вид, и что объемный коэффициент молекулярного поглощения не зависит от высоты в атмосфере. Далее мы приведем модификации  $k$ -метода, позволяющие избавиться от этих допущений. А пока рассмотрим возможности их учета в рамках сформулированной выше сравнительно простой вычислительной схемы.

Объемный коэффициент молекулярного поглощения зависит от температуры, давления воздуха и концентрации газов, поглощающих излучение [1,2]. В атмосфере все указанные параметры зависят от высоты, т.е. имеют вертикальные профили. Возникает задача нахождения по этим профилям неких эффективных скалярных значений давления, температуры и концентраций газов, которые в каком-то смысле соответствуют этим профилям. По таким скалярным значениям можно вычислить скалярный же объемный коэффициент молекулярного поглощения.

Для решения указанной задачи принимают условие равенства значений монохроматической функции пропускания для профилей и для скалярного представления указанных параметров. В результате получают вполне эффективные методы, учитывающие в том числе и параметры линий молекулярного поглощения. Подробно эти методы, вывод их формул и итоговые выражения рассмотрены в [1,2], поэтому мы не будем их воспроизводить, чтобы не отвлекаться на специфические детали, связанные с учетом параметров спектральных линий.

### **Возможности приближенного учета спектральной аппаратной функции**

Для достаточно широких спектральных интервалов при использовании непрямоугольной спектральной аппаратной функции можно пользоваться уже изложенным выше приемом разбиения на малые интервалы, для которых функция  $f(\lambda)$  может считаться примерно постоянной. Тогда проблема снимается.

Для узких спектральных интервалов, характерных для современных измерительных приборов, этот способ не подходит. В таком случае учет спектральной аппаратной функции прибора в  $k$ -методе также может быть выполнен довольно просто. Достаточно для конкретно заданной функции  $f(\lambda)$  суммировать в (5.2.5) веса интеграла вместе с ней, т.е. вычислять  $D_k := D_k + f(\lambda_l)d^{(\lambda)}(1, l, L)$ . В этом случае параметры  $k$ -метода утратят общность, т.к. будут получены для аппаратной функции  $f(\lambda)$  жестко заданного вида. Но

при создании компьютерных кодов, связанных с моделированием и обработкой данных измерений конкретными приборами, иного и требуется.

### **Особенности к-метода для задач без учета рассеяния**

Из сказанного выше нетрудно понять, что к-метод можно сравнить в некотором смысле с иллюзией. В своем финальном виде (5.2.4) он обеспечивает колоссальную эффективность спектрального интегрирования (достаточно рассчитать перенос излучения всего для десятка слагаемых). Однако, чтобы получить параметры расчета по (5.2.4), необходима максимально подробная сетка по длинам волн для функции объемного коэффициента молекулярного поглощения. Поэтому эффективность к-метода обеспечивается огромными по объему предварительными расчетами.

Для задач без учета рассеяния время счета интенсивности излучения или функции пропускания вполне сравнимо со временем расчета объемного коэффициента молекулярного поглощения (см. главу 1). Фактически речь идет лишь о дополнительном вычислении экспоненты и паре умножений. Поэтому в задачах без учета рассеяния необходимо обеспечить использование уже однажды полученных параметров к-метода для различных дальнейших расчетов.

В разделе 5.1 отмечалось, что стандартным приемом в задачах без учета рассеяния является переход к немонахроматической функции пропускания. Согласно (1.2.3) и его аналогу (5.1.1) она имеет вид

$$P(l) = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} P_{\lambda}(l_0, l) d\lambda' = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \exp\left(-\int_{l_0}^l k_{\lambda}(l') dl'\right) d\lambda'. \quad (5.2.6)$$

В (5.2.6) мы считаем объемный коэффициент ослабления равным объемному коэффициенту молекулярного поглощения, поскольку рассеяние отсутствует (см. разделы 1.3 и 2.1). Подставляя в (5.2.6) соотношения к-метода, получаем

$$P(l) = \sum_{k=1}^K D_k \exp\left(-\int_{l_0}^l k_k dl'\right), \quad (5.2.7)$$

откуда в итоге имеем выражение

$$P(l) = \sum_{k=1}^K \exp(-k_k(l-l_0)) D_k. \quad (5.2.8)$$

Соотношение (5.2.8) известно как разложение функции пропускания (немонахроматической) в сумму экспонент. Оно позволяет, однажды рассчитав параметры к-метода ( $k_k$ ,  $D_k$ ,  $k=1, \dots, K$ ), далее использовать их для любых трасс. Отметим что это верно для случая атмосферы с фиксированными характеристиками, по которым вычислялся объемный коэффициент молекулярного поглощения (т.е. температуры, давления и концентраций газов). Поэтому расчеты параметров к-метода проводят для определенного набора значений этих характеристик, в качестве которых обычно выбираются среднеклиматические.

### **Особенности к-метода для задач с учетом рассеяния.**

В этих задачах ситуация с использованием к-метода принципиально иная. Здесь время расчета интенсивности на порядки превышает время расчета объемного коэффициента молекулярного поглощения. Исключение имеет место для приближения однократного рассеяния. Однако и там получить эффективные формулы вида (5.2.8) не удастся. Поэтому для задач с учетом многократного рассеяния имеет смысл проводить громоздкие предварительные расчеты

параметров  $k$ -метода каждый раз перед вычислениями. Это все равно обеспечит значительное сокращение времени счета по сравнению с прямым спектральным интегрированием (5.1.1). Конечно, если можно пользоваться уже готовыми данными, то это замечательно. Но в плане проведения расчетов для произвольных вертикальных профилей атмосферных параметров следует предусмотреть предварительное вычисление параметров  $k$ -метода для заданной модели атмосферы перед моделированием немонохроматического рассеянного излучения. Заметим, что это относится ко всем методам учета многократного рассеяния кроме метода Монте-Карло, поскольку для него вместо  $k$ -метода существует собственный эффективный способ спектрального интегрирования, который рассматривается ниже в разделе 5.4.

### 5.3. Векторные модификации $k$ -метода

#### Строгий учет вертикальной неоднородности атмосферы в $k$ -методе

Рассмотрим теперь возможности строгого учета вертикальной неоднородности атмосферы в рамках  $k$ -метода. Пусть объемный коэффициент молекулярного поглощения зависит также и от высоты  $z$ , т.е.  $k(\lambda, z)$ . Записывая (5.2.2) с учетом этой зависимости, имеем

$$I = \sum_{l=1}^L I(k(\lambda_l, z_l)) d^{(\lambda)}(1, l, L), \quad (5.3.1)$$

где  $i=1, \dots, N$  – вертикальная сетка для неоднородной атмосферы (см. главу 1). Дальше можно рассуждать совершенно аналогично однородному случаю, т.е. соберем в сумме все близкие значения  $I(k(\lambda_l, z_l))$  и получим

$$I = \sum_{k=1}^K I(k_k(z_i)) D_k. \quad (5.3.2)$$

Различие теперь в том, что собирать вместе суммы  $D_k$  надо не для скалярной переменной, а для вектора  $k_k(z_i)$ . Т.е. это не одномерная, а многомерная функция размерности  $N$ , которую можно записать как функцию  $N$  переменных  $D_k(k_{k,1}, k_{k,2}, \dots, k_{k,N})$ .

Теоретически при  $K \rightarrow \infty$  функцию  $D_k(k_{k,1}, k_{k,2}, \dots, k_{k,N})$  можно интерпретировать как  $N$ -мерную гистограмму распределения значений объемного коэффициента молекулярного поглощения  $k(z_i)$ . Запишем ее как  $D(k_1, k_2, \dots, k_N)$ , а затем превратим эту гистограмму  $D(k_1, k_2, \dots, k_N)$  в плотность вероятности  $D^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_N)$ , проведя ее

нормировку  $D^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_N) = \frac{1}{R} D(k_1, k_2, \dots, k_N)$ ,

$$R = \int_{k_{1,\min}}^{k_{1,\max}} \dots \int_{k_{N,\min}}^{k_{N,\max}} D(k_1, k_2, \dots, k_N) dk_1 \dots dk_N, \quad (5.3.3)$$

и вычислим искомую интенсивность как математическое ожидание

$$I = \int_{k_{1,\min}}^{k_{1,\max}} \dots \int_{k_{N,\min}}^{k_{N,\max}} I(k_1, k_2, \dots, k_N) D^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_N) dk_1 \dots dk_N. \quad (5.3.4)$$

Теоретический подход и его итоговые соотношения (5.3.3)-(5.3.4) выглядят эффектно. Но чтобы реализовать их при практических вычислениях,

надо учитывать, что на самом деле переменные  $k_i$ ,  $i=1, \dots, N$  очень сильно коррелированные, т.е. являются зависимыми. Действительно, они определяются вертикальными профилями объемного коэффициента молекулярного поглощения  $k(\lambda, z)$ , который, в свою очередь, зависит от конкретных профилей давления, температуры воздуха и концентраций газов [1,2]. Поэтому переменные  $k_i$ ,  $i=1, \dots, N$  не могут быть какими угодно, а образуют довольно небольшое подмножество из множества всех возможных значений. Поэтому и гистограмма  $D^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_N)$  не распределена по всему пространству, а имеет форму, которая близка к диагональной. Учитывая это, можно предложить два варианта для практических вычислений по (5.3.3)-(5.3.4).

#### **Коррелированный k-метод (kk-метод)**

Как и раньше, будем строить одномерную гистограмму, но уже не на основе близости скалярных значений, а на основе близости векторов  $k_i$ ,  $i=1, \dots, N$ . Тогда просто имеем для вычислений соотношение (5.3.2), переписав которое в явном многомерном виде, получаем

$$I = \sum_{k=1}^K I(k_{k,1}, k_{k,2}, \dots, k_{k,N}) D_k. \quad (5.3.5)$$

Здесь конкретный индекс  $k$  в (5.3.5) определяет сразу весь вертикальный профиль  $k_i$ ,  $i=1, \dots, N$ . Этот прием известен как коррелированный k-метод или kk-метод.

Основная проблема при практическом применении kk-метода – это выбор критерия близости векторов  $k_i$ ,  $i=1, \dots, N$ . Здесь используется стандартный математический подход. Пусть есть два вектора  $\mathbf{k}^{(1)}$  и  $\mathbf{k}^{(2)}$ , тогда мера различия между ними (т.е. аналог расстояния) есть  $\rho(\mathbf{k}^{(1)}, \mathbf{k}^{(2)})$ , где  $\rho()$  – функция метрики. Конкретная метрика может быть различной. Обычно используются либо евклидова метрика  $\rho(\mathbf{k}^{(1)}, \mathbf{k}^{(2)}) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (k_i^{(1)} - k_i^{(2)})^2}$  – среднеквадратическое отклонение, либо метрика по максимальному отклонению  $\rho(\mathbf{k}^{(1)}, \mathbf{k}^{(2)}) = \max_{i=1, \dots, N} |k_i^{(1)} - k_i^{(2)}|$ .

После выбора функции метрики, можно свести алгоритм нахождения коэффициентов  $D_k$  в kk-методе к одномерному случаю (5.2.5). Поскольку все объемные коэффициенты поглощения являются неотрицательными, достаточно сравнивать соответствующие вектора с нулевым, т.е. рассматривать для каждого  $k_i$ ,  $i=1, \dots, N$  величину  $\rho(\mathbf{0}, \mathbf{k})$ . Она будет иметь тот же смысл, что и значение  $k$  для скаляра. Теперь действуем по изложенной схеме одномерного случая. Перебирая все вертикальные профили  $\mathbf{k}$  на сетке длин волн, для каждого из них определяем  $\rho(\mathbf{0}, \mathbf{k})$  и находим минимальное и максимальное значение этой функции. Затем делим получившийся интервал на  $K$  частей, после чего при вычислении  $D_k$  находим по  $\rho(\mathbf{0}, \mathbf{k})$  номер интервала, к которому относится конкретный вектор  $\mathbf{k}$ .

#### **kk-метод для задач без учета рассеяния**

Подставляя аналог (5.3.5) для функции пропускания (как было проделано в разделе 2.5, см. формулы (2.5.6)-(2.5.8)), для задач без учета рассеяния

получаем соотношение кк-метода для некогерентной функции пропускания

$$P(l) = \sum_{k=1}^K \exp\left(-\sum_i k_{k,i}(l_{i+1} - l_i)\right) D_k. \quad (5.3.6)$$

Суммирование в экспоненте (5.2.14) ведется по всем подынтервалам пути от  $l_0$

до  $l$ . Фактически это численное интегрирование  $\tau(l) = \int_{l_0}^l k_k(l) dl$  (см. подробно раздел 1.2), поэтому запись (5.3.6) следует рассматривать как условную, символическую, т.к. в ней важно было показать роль коэффициентов  $k_{k,i}$ .

### **кк-метод для задач с учетом рассеяния**

Для задач с учетом рассеяния используется непосредственно (5.3.5). При этом, как отмечалось выше, имеет смысл выполнять расчеты коэффициентов кк-метода  $k_{k,i}$ ,  $i=1, \dots, N$ ,  $k=1, \dots, K$  для каждого вычисления с новыми вертикальными профилями температуры, давления и концентраций газов, поскольку время необходимое на эти предварительные расчеты все равно несравнимо меньше времени прямого спектрального интегрирования интенсивности рассеянного излучения.

Отметим еще одну возможность применения кк-метода в задачах с учетом рассеяния, которая открывается при использовании современных компьютеров. Не выполняя предварительных расчетов параметров кк-метода (т.е. считая интенсивность излучения по исходной подробной сетке длин волн), можно накапливать в памяти компьютера значения монохроматических интенсивностей и соответствующих им векторов вертикальных профилей объемного коэффициента поглощения  $k_i$ ,  $i=1, \dots, N$ . А для каждого профиля на очередной длине волны сравнивать его близость (по выбранной метрике) со всеми уже хранящимися в памяти профилями. Если находится вектор, который отличается от данного профиля не более чем на заданное значение, то вычисления интенсивности не производятся, а сразу выбирается ее соответствующее значение из массива. Если близкого профиля не найдено, то проводятся вычисления интенсивности, а затем она и профиль объемного коэффициента поглощения  $k_i$ , которому эта интенсивность соответствует, пополняют массив.

### **Переход к главным компонентам**

Вторая возможность практической реализации расчетов по (5.3.3)-(5.3.4), которая с математической точки зрения является более строгой и более точной в смысле вычислений, состоит в переходе к диагональной форме плотности вероятности  $D^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_N)$  и выделение ее главных компонент. Преобразуем вычисления к ортогональному базису совокупности векторов  $\mathbf{k}$ , т.е. рассмотрим новые переменные  $\mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{k}$ , где  $\mathbf{B}$  – матрица из собственных векторов ковариационной матрицы всех профилей  $\mathbf{k}$ . Важным свойством новых переменных является их взаимная независимость, т.е. они не коррелированы, что можно использовать для вычислений по (5.3.3)-(5.3.4).

На практике следует для всей совокупности вертикальных профилей объемного коэффициента поглощения (для всех длин волн)  $k_{i,l}$ ,  $i=1, \dots, N$ ,  $l=1, \dots, L$  вычислить ковариационную матрицу  $\mathbf{C}$ . При этом удобными

являются формулы для ее элементов, которые позволяют проводить суммирование непосредственно при расчетах  $k_{i,l}$  в цикле по длинам волн:

$$k_i^{(1)} = \sum_{l=1}^L k_{i,l}, \quad k_j^{(1)} = \sum_{l=1}^L k_{j,l}, \quad k_{ij}^{(2)} = \sum_{l=1}^L k_{i,l} k_{j,l}, \quad c_{ij} = \frac{k_{ij}^{(2)}}{N} - \frac{k_i^{(1)} k_j^{(1)}}{N^2}, \quad i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, N.$$

Матрица  $\mathbf{C}$  является симметричной, а для нахождения ее собственных чисел  $\omega_i$  и векторов (т.е. столбцов матрицы  $\mathbf{B}$ ) отсылаем к Приложению 8.

Далее используется известный метод главных компонент, который состоит в том, что при сильной корреляции профилей  $\mathbf{k}$  реально можно использовать не все  $N$  независимых переменных  $\mathbf{q}$ , а значительно меньшее их количество. Обозначим это число  $M$  (возможно, что получим просто  $M=1$ ). Для выбора  $M$  анализируются собственные числа ковариационной матрицы  $\mathbf{C}$ . Для этого их сначала нужно упорядочить в убывающем порядке, а после этого

оценить суммы  $s_i = \sum_{j=1}^i \omega_j$ ,  $i=1, \dots, N$ , которые сравниваются с полной суммой

собственных чисел  $s = \sum_{j=1}^N \omega_j$ . Как только различие между величинами  $s_i$  и  $s$

перестает быть значимым по заданному критерию (стандартно – менее 1%), мы получаем искомое значение  $M=i$ .

После выбора  $M$  в матрице  $\mathbf{B}$  оставляем только  $M$  столбцов, соответствующих главным собственным числам  $\omega_j$ ,  $j=1, \dots, M$ . Теперь эта матрица, которую обозначим  $\mathbf{G}$  (а ее элементы  $g_{ij}$ ,  $i=1, \dots, N$ ,  $j=1, \dots, M$ ), уже не является квадратной. С ее помощью для каждого  $\mathbf{k}$  осуществляем переход к независимому базису

$$\mathbf{q} = \mathbf{Gk}, \quad (5.3.7)$$

где у вектора  $\mathbf{q}$  уже всего  $M$  значений:  $q_j$ ,  $j=1, \dots, M$ . Вследствие независимости новых переменных функция плотности вероятности  $D^{(n)}(k_1, k_2, \dots, k_N)$  распадается на произведение  $D^{(n)}(q_1)D^{(n)}(q_2) \dots D^{(n)}(q_M)$ . Поэтому интеграл (5.3.4) можно вычислять последовательным интегрированием. Переходя от интеграла к дискретной сумме, получаем выражение для интенсивности

$$I = \sum_{j_1=1}^{J_1} \sum_{j_2=1}^{J_2} \dots \sum_{j_M=1}^{J_M} I(\mathbf{k} = \mathbf{G}^*(q_{j_1}, q_{j_2}, \dots, q_{j_M})^*) D_{j_1} D_{j_2} \dots D_{j_M}, \quad (5.3.8)$$

где символ “\*” означает транспонирование матрицы (т.е. замена строк столбцами), а вектор  $\mathbf{q}$  на самом деле – это столбец, но записан в (5.3.8) в транспонированном виде для экономии места.

#### Схема алгоритма перехода к главным компонентам

На основе (5.3.8) можно в итоге построить схему алгоритма для практического использования данной модификации k-метода. Сначала надо построить ковариационную матрицу  $\mathbf{C}$  профилей объемных коэффициентов поглощения, вычислить ее собственные числа и векторы. Затем нужно выделить главные компоненты, т.е. найти значение  $M$  и матрицу  $\mathbf{G}$ . Далее вновь выполняем цикл по длинам волн и для каждого профиля  $\mathbf{k}$  по (5.3.7) находим вектор  $\mathbf{q}$  и максимальное и минимальное значения для каждой его компоненты  $q_j$ ,  $j=1, \dots, M$ . После чего разбиваем диапазон между этими максимальными и



минимальными значениями на  $J_j$  интервалов. В выражении (5.3.8) ради общности – это разные числа разбиений, хотя удобнее, конечно, брать единое. Однако нужно учитывать, что чем больше номер  $j$ , тем слабее влияние данной главной компоненты на результаты вычислений. Середина каждого интервала задает набор конкретных значений  $q_{j,k}$ ,  $k=1, \dots, J_j$ . Теперь, уже в третий раз выполняя цикл по длинам волн, для каждого значения вертикального профиля  $\mathbf{k}$  по (2.3.7) находим  $\mathbf{q}$ , а по каждой его компоненте  $q_j$  номер интервала  $k$ , в который попадает ее значение (см. Приложение 1), и затем суммируем аналогично выражению (5.2.5)  $D_{j,k} := D_{j,k} + d^{(\lambda)}(1, l, L)$ , где  $l$  – номер спектрального интервала. При этом вычисляем нормировочный коэффициент

$$R = \frac{1}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}} \sum_{j_1=1}^{J_1} \sum_{j_2=1}^{J_2} \dots \sum_{j_M=1}^{J_M} D_{j_1} D_{j_2} \dots D_{j_M}. \quad \text{Наконец, окончательно присваиваем}$$

$$D_{j,k} := D_{j,k} / R.$$

Итак, получен набор значений  $q_{j,k}$  и соответствующих им величин  $D_{j,k}$ ,  $k=1, \dots, J_j$ ,  $j=1, \dots, M$ .

Отметим, что в приведенной схеме алгоритма цикл по длинам волн выполняется три раза, поэтому нужно хранить в памяти компьютера весь набор векторов профилей  $\mathbf{k}$ , вычисленных в первом проходе. Ресурсы современных компьютеров это позволяют. Впрочем, эта же проблема возникает и для скалярного  $k$ -метода и для  $kk$ -метода, где требуется предварительное выполнение цикла для определения пределов вариаций объемного коэффициента поглощения или его профиля.

#### **Переход к главным компонентам в задачах без учета рассеяния**

Здесь получить простые выражения вида (5.3.6) уже нельзя, т.к. в экспоненте должен стоять реальный профиль  $\mathbf{k}$ , а совсем не вектор  $\mathbf{q}$ . Тем не менее, чтобы не нарушать традицию, приведем аналог соотношения (5.3.6) в явном виде:

$$P(l) = \sum_{j_1=1}^{J_1} \sum_{j_2=1}^{J_2} \dots \sum_{j_M=1}^{J_M} \exp \left( - \sum_i (g_{i1} q_{j_1} + g_{i2} q_{j_2} + \dots + g_{iM} q_{j_M}) (l_{i+1} - l_i) \right) D_{j_1} D_{j_2} \dots D_{j_M}. \quad (5.3.9)$$

Как уже отмечено выше, суммирование по  $i$  в показателях экспонент в (5.3.9) следует понимать условно, т.е. как запись численного вычисления интеграла по высоте (раздел 1.2). Отметим, что (5.3.9) есть вновь разложение функции пропускания в уже кратную сумму экспонент.

#### **Переход к главным компонентам в задачах с учетом рассеяния**

Если необходимо учитывать рассеяние, то вычисления проводятся непосредственно по формуле (5.3.8). Для каждого набора индексов, диктуемых суммами, берется вектор  $\mathbf{q}$ , по которому находится вертикальный профиль объемного коэффициента поглощения  $\mathbf{k} = \mathbf{G}^* \mathbf{q}$ . С этим профилем затем вычисляется монохроматическая интенсивность рассеянного излучения.

Громоздкость выражений и вычислений  $k$ -метода с главными компонентами общего вида может показаться пугающей, но отметим еще раз, что реальное значение  $M$  в них невелико. Достаточно вероятен случай, когда  $M = 1$ .

### Строгий учет спектральной аппаратной функции прибора в k-методе

Приемы учета спектральной аппаратной функции прибора (и вообще любых других “дополнительных” спектральных множителей, которые нужно учитывать по тем или иным причинам) в рамках вышеизложенного подхода выглядят вполне очевидными. Аппаратную функцию следует рассматривать как еще одну, дополнительную компоненту многомерного вектора в исходных выражениях (5.3.3) и (5.3.4). Далее следует рассуждать по аналогии, хотя, например, применение kк-метода становится проблематичным. Во-первых, спектральная аппаратная функция уже не коррелирует с вертикальным профилем объемного коэффициента поглощения. Во-вторых, понятие близости векторов теперь осложняется в силу разной природы (единицы измерения, диапазоны вариаций и т.п.) спектральной аппаратной функции и объемного коэффициента поглощения. Тут можно пытаться преодолеть эту трудность, отдельно вычисляя близость по коэффициенту и по аппаратной функции, а потом складывая их с разными весами. С точки зрения выделения главных компонент, подобная проблема не возникает. Предлагаем читателю самостоятельно расписать этот случай с учетом спектральной аппаратной функции в качестве упражнения.

## 5.4. Спектральное интегрирование методом Монте-Карло

### Теория интегрирования по ММК

Изначально метод Монте-Карло как раз и был предложен для вычисления интегралов (в том числе интегралов специального вида (5.1.1)). Действительно, по определению интеграла вероятности, для (5.1.1) справедливо тождество

$$I = \mathbf{M}_{f(\lambda)}[I(\lambda)], \quad (5.4.1)$$

т.е. искомая интенсивность является математическим ожиданием ( $\mathbf{M}[\ ]$ ) монохроматической интенсивности, длина волны которой трактуется как случайная величина, распределенная на интервале интегрирования  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  с плотностью вероятности  $f(\lambda)$ .

В общем случае для функции  $f(\lambda)$ , как на плотности вероятности, нужно накладывать условие нормировки

$$\int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} f(\lambda) d\lambda = 1, \quad (5.4.2)$$

но в (5.1.1) оно уже выполнено (см. раздел 1.1, соотношение (1.1.15)).

### Возможность спектрального интегрирования по ММК

Моделируя согласно (5.4.1) длину волны как случайную величину, можно достаточно эффективно вычислять интеграл (5.1.1). Заметим, что при этом ММК не содержит формальных ограничений на ширину интервала интегрирования в отличие от практически всех изложенных выше методов, поскольку спектральное интегрирование в ММК не основано на свойствах объемного коэффициента молекулярного поглощения. В этом смысле ММК формально может применяться даже к очень широким спектральным интервалам, например, при вычислении интегральных полусферических потоков солнечного и теплового излучения во всем соответствующим им диапазонах спектра. Единственной трудностью на практике, все же ограничивающей ширину интервала, здесь становится необходимость

получения объемного коэффициента молекулярного поглощения для любой случайно выбранной длины волны. Стохастический характер ММК не позволяет использовать эффективные приемы вычисления, разработанные для последовательно идущих длин волн. Повторим только, что задача расчета объемного коэффициента молекулярного поглощения лежит вне рамок тематики данного пособия.

#### **Схема алгоритма спектрального интегрирования по ММК**

Согласно (5.4.1), следует выбрать длину волны как значение случайной величины, распределенной на интервале  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  с плотностью вероятности  $f(\lambda)$  (раздел 4.1, соотношение (4.1.2)). Далее для каждой длины волны нужно вычислить параметры атмосферы и поверхности, а затем по ним вычисляется монохроматическая интенсивность. Это возможно и для случая учета многократного рассеяния при использовании каких-либо из методов, описанных в разделах 1-4. Если для указанного расчета используется ММК (разделы 4.3 и 4.4), то заметим, что существует прием, позволяющий многократно увеличить эффективность подобных расчетов, но он будет описан ниже. Результаты расчетов для каждой длины волны суммируются в общем счетчике монохроматической интенсивности (раздел 4.3), а после окончания цикла по всем случайным длинам волн искомая интенсивность находится делением значения счетчика на число длин волн.

Тонким моментом в данной схеме является выбор полного числа моделируемых длин волн. Очевидно, что он должен быть таким, чтобы учитывать особенности всех спектральных линий. С другой стороны, все линии учитывать и не надо, поскольку важны лишь соответствующие им значения объемных коэффициентов молекулярного поглощения (точнее, их профилей), которые будут одинаковыми для разных линий (об идеологии k-метода см. разделы 4.2 и 4.3). Поэтому требуется избегать как выбора излишне большого числа случайных длин волн, неоправданно увеличивающего время счета, так и выбора слишком малого их количества, что не позволит учитывать все спектральные особенности и может привести в результате к ошибкам вычислений.

Общие рекомендации выбора числа случайных длин волн здесь сложно сформулировать. Все определяется особенностями конкретных задач и спектральных интервалов. Общий принцип состоит в том, что необходимы предварительные расчеты и сравнение их результатов с эталонными. Можно использовать вычисление случайной погрешности моделирования по ММК (раздел 4.2) и анализ ее уменьшения (см. алгоритм раздела 4.3). Однако здесь тоже нельзя выбирать число длин волн, через который производится этот анализ, ни слишком большим, ни слишком малым.

#### **Двойная (кратная) рандомизация в ММК**

Стандартно при расчетах полей многократно рассеянного солнечного излучения интегрирование по спектру при использовании ММК применяется одновременно с расчетами интенсивностей (потоков) также по ММК. Тогда можно объединить циклы моделирования по случайным длинам волн и по траекториям фотона в атмосфере. То есть для каждой длины волны достаточно моделировать лишь единственную траекторию! Суммарный результат все равно окажется искомой немонахроматической величиной.

Этот прием в рамках ММК известен как двойная (кратная) рандомизация. С ним мы уже встречались в самом конце предыдущей главы (раздел 4.4). Он основан на том, что для ММК не важна собственно кратность

интегрирования, в нем лишь важно обеспечить случайное моделирование по всем интегрируемым переменным. В данном случае мы имеем решение монохроматического уравнения переноса излучения (одна операция интегрирования, причем уже не одномерного), с добавлением интегрирования по спектру (вторая операция). Поэтому общий интеграл (и уравнения переноса, и по спектру) вычисляется одновременно в едином цикле по случайным длинам волн.

Для применения кратной рандомизации на практике в схему алгоритма ММК (разделы 4.3 и 4.4) вносится простое изменение. Монохроматические параметры атмосферы и поверхности вычисляются в цикле по траекториям фотона в начале каждой траектории по выбранной случайным образом длине волны.

Двойная рандомизация в ММК при спектральном интегрировании позволяет получать максимально эффективные алгоритмы расчета интенсивностей (потоков) немонахроматического излучения, которые вполне сравнимы по времени счета с классическими вычислениями по ММК монохроматических интенсивностей (потоков). В действительности оказывается, что и там, и там нужно примерно одинаковое число траекторий фотонов.

#### **Выбор случайных длин волн для некоторых стандартных аппаратных функций**

Рассмотрим теперь алгоритмы выбора случайных длин волн для ряда стандартных аппаратных функций спектральных приборов.

Прямоугольная аппаратная функция. С учетом требований нормировки она имеет вид

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}, & \text{если } \lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max} \\ 0, & \text{если } \lambda < \lambda_{\min} \text{ или } \lambda > \lambda_{\max} \end{cases} \quad (5.4.3)$$

Решение уравнения (4.1.2) для (5.4.3) элементарно:

$$\lambda = \lambda_{\min} + r(\lambda_{\max} - \lambda_{\min}), \quad (5.4.4)$$

где  $r$  – случайное число (см. раздел 4.1).

Отметим, что прямоугольная аппаратная функция играет особую роль, потому что именно она используется в задачах энергетики атмосферы и в задачах расчета полусферических потоков излучения (см. раздел 1.1).

Треугольная аппаратная функция. Она максимальна в центре интервала и линейно спадает до нуля к его краям:

$$f(\lambda) = \begin{cases} 1 - \left| \frac{2\lambda - \lambda_{\min} - \lambda_{\max}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}} \right|, & \text{если } \lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max} \\ 0, & \text{если } \lambda < \lambda_{\min} \text{ или } \lambda > \lambda_{\max} \end{cases} \quad (5.4.5)$$

Решая (4.1.2) для (5.4.5), получаем

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_{\min} + (\lambda_{\max} - \lambda_{\min})\sqrt{2r}/2, & \text{если } r \leq 1/2 \\ \lambda_{\max} - (\lambda_{\max} - \lambda_{\min})\sqrt{2-2r}/2, & \text{если } r > 1/2 \end{cases} \quad (5.4.6)$$

Аппаратная функция Гаусса. Она имеет вид

$$f(\lambda) = \exp\left(-\frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2a^2}\right), \quad (5.4.7)$$

где  $\lambda_0 = (\lambda_{\max} + \lambda_{\min})/2$  (середина интервала),  $a$  – заданный параметр. Особенностью (5.4.7) является формальная неограниченность, т.е. для нее мы должны положить пределы интегрирования от 0 до  $\infty$ . Но на практике в случае бесконечного диапазона интегрирования просто ограничивается интервал согласно выбранному критерию (подробнее об этом будет сказано ниже). С другой стороны, именно для функции Гаусса ввод таких ограничений не требуется в силу специфики моделирования для нее случайной длины волны.

Действительно, хотя для (5.4.7) уравнение (4.1.2) не имеет явного аналитического решения, но данной функции соответствует нормально распределенная случайная величина, для которой математическое ожидание равно  $\lambda_0$ , а среднеквадратическое отклонение (СКО) есть  $a$ . Модель нормально распределенной случайной величины хорошо известна. Она получается из равномерного распределения на основе центральной предельной теоремы, которая утверждает, что среднее арифметическое стремится к нормальному распределению. Причем для усреднения оказывается достаточным для обеспечения разумной точности брать всего десять случайных чисел. В итоге имеем

$$\lambda = \lambda_0 + a\sqrt{3}\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\sum_{i=1}^{10}r_i - \sqrt{10}\right), \quad (5.4.8)$$

где  $r_i$  – последовательность случайных чисел, выбираемых по равномерному на интервале [0,1] распределению.

Отметим, что соотношение (5.4.8) есть не что иное, как самостоятельный генератор нормально распределенных случайных чисел с математическим ожиданием  $\lambda_0$  и СКО, равным  $a$ .

Другие аппаратные функции. Для других стандартных спектральных аппаратных функций (в частности, для дифракционных спектральных элементов аппаратная функция имеет характерный вид

$$\text{sinc}^2(\lambda) = \frac{\sin^2(a(\lambda - \lambda_0))}{a^2(\lambda - \lambda_0)^2}, \text{ где } \lambda_0 \text{ – центральная длина волны, } a \text{ – параметр)}$$

явных решений уравнения (4.1.2) не существует. Поэтому следует затабулировать эти функции, не забывая при этом вычислить нормировочный интеграл (5.4.2) по формуле трапеций и поделить на него значения таблицы. Далее используем алгоритм моделирования случайной длины волны для таблично заданной функции, который аналогичен алгоритму для индикатрисы рассеяния (4.2.6) и (4.2.7). Рекомендуем читателю написать его в качестве упражнения. Если аппаратная функция изначально задана в виде таблицы, то этим все исчерпывается.

Для аналитически заданных аппаратных функций, в частности  $\text{sinc}^2(\lambda)$ , отметим, что, во-первых, таблица обязательно должна хорошо “прорисовывать” функцию и явно включать все ее локальные экстремумы. Во-вторых, для формально неограниченных функций (типа  $\text{sinc}^2(\lambda)$ ) следует искусственно установить интервал  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ , вне которого значениями  $f(\lambda)$  можно пренебречь. Здесь стандартным приемом является выбор указанного интервала по минимальному отношению модуля очередного локального экстремума (именно так, а не произвольного значения!) к глобальному максимуму функции.

### Случай наличия в аппаратной функции отрицательных значений

Этот случай требует особого рассмотрения. Он возможен для таблично заданных аппаратных функций, а также реализуется для функции вида  $\text{sinc}(\lambda) = \frac{\sin(a(\lambda - \lambda_0))}{a(\lambda - \lambda_0)}$  ( $\lambda_0$  – центральная длина волны,  $a$  – параметр), которая характерна для Фурье-спектрометров.

При наличии в функции  $f(\lambda)$  отрицательных значений ее уже нельзя трактовать как плотность вероятности, поскольку интеграл от нее с переменным верхним пределом перестанет быть монотонно возрастающей функцией. Идея применения ММК к таким случаям состоит в прибавлении к  $f(\lambda)$  некоторой величины так, чтобы она стала положительной.

Рассмотрим следующее тождественное преобразование исходного интеграла (5.1.1)

$$I = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} (\psi(\lambda') - q) I(\lambda') d\lambda' \bigg/ \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} (\psi(\lambda') - q) d\lambda', \quad (5.4.9)$$

где  $\psi(\lambda) = f(\lambda) + q$ ,  $q$  – значение, прибавляемое к аппаратной функции  $f(\lambda)$ , чтобы функция  $\psi(\lambda)$  была неотрицательной. На практике в качестве  $q$  берется просто глобальный минимум  $f(\lambda)$ . Далее все сводится к элементарным алгебраическим преобразованиям (5.4.9), которые рекомендуем воспроизвести читателю. В итоге вместо (5.4.9) получаем

$$I = \frac{I_1 - I_2 q (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) / C}{1 - q (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) / C},$$

$$I_1 = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \psi(\lambda') I(\lambda') d\lambda' \bigg/ \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \psi(\lambda') d\lambda', \quad I_2 = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} I(\lambda') d\lambda' \bigg/ (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}),$$

$$C = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \psi(\lambda') d\lambda' = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} (f(\lambda') + q) d\lambda' = 1 + q (\lambda_{\max} - \lambda_{\min}). \quad (5.4.10)$$

Согласно (5.4.10) при наличии в спектральной аппаратной функции отрицательных значений по ММК вычисляются два математических ожидания:  $I_1$  – интенсивности при случайном моделировании длины волны с плотностью вероятности, определяемой функцией  $\psi(\lambda)$  (неотрицательной!), и  $I_2$  – интенсивности при случайном моделировании длины волны согласно равномерному распределению (соотношение (5.4.4)). Отметим, что расчеты по ММК придется проводить дважды. После этого искомый окончательный результат (интеграл (5.1.1)) вычисляется по первой из формул (5.4.10).

### Еще раз о разбиении на малые интервалы интегрирования

Как указывалось выше, хотя ММК формально может работать для спектральных интервалов неограниченной размерности, на практике этого достичь невозможно. Слишком широкие спектральные интервалы так или иначе приходится дробить на мелкие ради увеличения скорости вычислений путем применения быстрых алгоритмов расчета объемного коэффициента молекулярного поглощения. В этом случае следует не забывать о необходимости для ММК нормировать аппаратную функцию прибора (5.4.2), но уже не для всего глобального, а для каждого из малого интервалов.

При таком дроблении ничего не изменится только в случае прямоугольной аппаратной функции (5.4.3): соотношение (5.4.4) по-прежнему

будет работать с необходимой заменой  $\lambda_{\min}$  и  $\lambda_{\max}$  на границы соответствующего малого интервала. Прямоугольная аппаратная функция является линейной, поэтому уравнение (4.1.2) для нее всегда разрешимо в явном виде. Предлагаем читателю расписать все эти решения (три логических случая) в качестве упражнения. Для всех остальных аппаратных функций, включая и функцию Гаусса (5.4.7), следует использовать табуляцию на малом интервале с ее нормировкой, как описано выше. Для исходно заданной табличной функции придется работать с частью таблицы, которая соответствует рассматриваемому малому интервалу.

## 6. Учет поляризации излучения

### 6.1. Поляризация излучения

#### Физическая природа поляризации

Выше, начиная с формулировок исходных понятий и соотношений теории переноса излучения в главах 1 и 2, мы рассматривали электромагнитное излучение лишь с точки зрения переносимой им энергии. Однако как для описания взаимодействия излучения с веществом атмосферы и поверхности планеты, так и для точного моделирования процессов переноса излучения нельзя обойтись без рассмотрения физической природы излучения.

Свет (излучение) является электромагнитными волнами, которые в том числе проявляют квантовые (корпускулярные) свойства. При этом одни физические процессы удобно описывать с точки зрения электромагнитной волновой природы излучения (в волновой оптике и классической электродинамике), а другие – с точки зрения его квантовой природы (в квантовой механике). В частности, в рамках волновой оптики простое и наглядное описание находят такие явления, как поляризация излучения, рассеяние излучения газами и аэрозольными частицами, отражение излучения от различных объектов. С другой стороны, только с позиций квантовой механики объяснимы особенности поглощения излучения газами и перераспределения энергии по частотам при рассеянии [1,2]. В данном разделе речь пойдет о явлениях, связанных с электромагнитной, волновой природой излучения.

#### Электромагнитные волны

Существование электромагнитных волн является теоретическим следствием уравнений Максвелла. Сами уравнения и их волновые решения приведены во многих учебниках и монографиях. Поэтому здесь мы обойдемся без написания этих уравнений в явном виде, ограничившись только необходимыми свойствами электромагнитных волн.

Электромагнитная волна в вакууме является поперечной, что означает взаимную перпендикулярность векторов  $\vec{v}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  в любой момент времени. Здесь  $\vec{v}$  – вектор скорости волны,  $\vec{H}$  – вектор магнитной напряженности электромагнитного поля,  $\vec{E}$  – вектор электрической напряженности электромагнитного поля. В однородных средах электромагнитные волны также сохраняют свойство быть поперечными. В веществе вместо векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  возникают, соответственно, векторы электрической и магнитной индукции  $\vec{D} = \tilde{\epsilon}\vec{E}$  и  $\vec{B} = \tilde{\mu}\vec{H}$ , где  $\tilde{\epsilon}$  – диэлектрическая проницаемость вещества,  $\tilde{\mu}$  – магнитная проницаемость вещества. В общем случае проницаемости могут быть тензорами, однако в задачах атмосферной оптики ограничиваются рассмотрением скалярных случаев, кроме того, полагают  $\tilde{\mu} = 1$ . Это дает возможность не упоминать векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$ , оперируя только с векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . При этом  $v = c/\tilde{n}$ , где  $c$  – скорость света в вакууме,  $\tilde{n}$  – показатель преломления вещества. Кроме того,  $\tilde{n}^2 = \tilde{\epsilon}$ . Связь тройки векторов, образующих волну, задается соотношением:

$$\vec{H} = \frac{\tilde{n}^2}{c} \vec{v} \times \vec{E}. \quad (6.1.1)$$



Поток электромагнитной энергии через некоторую поверхность  $S$  выражается интегралом  $\frac{1}{4\pi} \int_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n} d^2S$ , где  $\vec{n}$  – вектор нормали к поверхности. Считая, что поверхность определяет некоторый телесный угол  $\Omega$  (например, если  $S$  – часть поверхности сферы), что электромагнитная волна монохроматическая и сравнивая приведенное выражение с формулой для потока (1.1.8), получаем, что интенсивность излучения равна модулю вектора  $\frac{1}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$ , который называется вектором Пойтинга. Тогда из (6.1.1) следует, что  $I = \frac{\tilde{n}}{4\pi} \vec{E} \cdot \vec{E}$ , т.е. интенсивность излучения пропорциональна квадрату вектора напряженности электрического поля. Коэффициент пропорциональности для этой зависимости в оптическом диапазоне не имеет практического значения, поскольку вследствие огромных частот электромагнитных волн непосредственному измерению доступна не их электрическая напряженность, а именно энергия (см. раздел 1.1). Поэтому обычно (см. [1,2]) указанный коэффициент пропорциональности в формулах просто опускают, т.е. полагают равным единице. Этому переходу соответствует стандартная трактовка понятия интенсивности излучения в оптике, как некоторой нечетко определенной величины, пропорциональной  $\vec{E} \cdot \vec{E}$ .

Пусть монохроматическая электромагнитная волна распространяется вдоль оси  $X$  декартовой системы координат. Тогда выражение для вектора ее электрической напряженности имеет вид

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0(x) \cos(2\pi\nu t - 2\pi x/\lambda + \delta_0), \quad (6.1.2)$$

где  $\vec{E}_0(x)$  – амплитуда вектора электрической напряженности, в дальнейшем, для краткости – амплитуда волны,  $t$  – время,  $\nu$  – частота волны,  $\lambda$  – длина волны,  $\delta_0$  – начальная фаза волны (определяемая условием  $\vec{E}(0,0) = \vec{E}_0(0) \cos(\delta_0)$ ). Поскольку вектор напряженности электрического поля перпендикулярен направлению волны, проекции  $\vec{E}(x,t)$  и  $\vec{E}_0(x)$  на ось  $X$  тождественно равны нулю, зависимость от координаты  $x$  в (6.1.2) означает на самом деле зависимость величин проекций указанных векторов на оси  $Y$  и  $Z$ . Реально вектор электрической напряженности колеблется в плоскости  $YZ$ , то есть он двумерный вектор. Как уже упоминалось выше, мгновенные значения  $\vec{E}(x,t)$  при измерениях интенсивности не используются, процедуре измерений соответствует усреднение  $\vec{E}(x,t)$  за достаточно длительное по сравнению с периодом колебаний волны время (см. [1,2] и раздел 1.1). Поэтому при вычислении с использованием (6.1.2) интенсивности электромагнитного излучения, удобно усреднить произведение  $\vec{E} \cdot \vec{E}$  за некоторый временной интервал, в качестве которого в теории естественно выбрать один период  $T = 1/\nu$ . Тогда  $I = \frac{1}{T} \vec{E}_0(x) \cdot \vec{E}_0(x) \int_t^{t+1/\nu} \cos^2(2\pi\nu t' + 2\pi\tilde{n} vx/c + \delta_0) dt'$ , что дает

$$I(x) = \frac{1}{2} \vec{E}_0(x) \cdot \vec{E}_0(x) \quad (6.1.3)$$

(произведение векторов в (6.1.3) является скалярным). Наконец, укажем, что усреднение по времени квадратичных по напряженностям электромагнитного

поля величин объясняется также тем, что периоды волн очень малы по сравнению с временными характеристиками измерительных приборов.

### Комплексная форма записи электромагнитной волны

В выражении вида (6.1.2) есть некоторый произвол в выборе начальной фазы волны: можно было бы использовать функцию синус и фазу  $\pi/2 - \delta_0$ . Во избежание указанной неопределенности в теории колебаний стандартно используется комплексная форма записи (электромагнитной волны – в нашем случае). Воспользовавшись формулой Эйлера  $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ , где  $i$  – мнимая единица, запишем (6.1.2) в комплексной форме

$$\tilde{E}(x, t) = \vec{E}_0(x) \exp(i(2\pi\nu t - 2\pi x/\lambda)). \quad (6.1.4)$$

Теперь электрическая напряженность (6.1.2) получается из (6.1.4) как линейная комбинация  $\vec{E}(x, t) = \cos \delta_0 \operatorname{Re}(\tilde{E}(x, t)) - \sin \delta_0 \operatorname{Im}(\tilde{E}(x, t))$ . В оптических задачах начальная фаза  $\delta_0$  не представляет интереса, поэтому стандартно для простоты полагают  $\delta_0 = 0$ , а физический смысл приписывается вещественной части комплексной величины  $\tilde{E}(x, t)$ .

Запись в форме (6.1.4) позволяет легко разделить пространственную и временную зависимости электромагнитной волны:

$$\tilde{E}(x, t) = \tilde{E}_0(x) \exp(2\pi i \nu t), \quad \tilde{E}_0(x) = \vec{E}_0(x) \exp(-2\pi i \tilde{n} x/c), \quad (6.1.5)$$

где  $\tilde{E}_0(x)$  – комплексная амплитуда электромагнитной волны. Выделение комплексной амплитуды очень удобно, поскольку для стационарных волн интерес представляет только пространственное изменение амплитуды, т.е. функция  $\tilde{E}_0(x)$ . Легко проверить, что при переходе к комплексной форме выражение для интенсивности (6.1.3) сохраняется, только теперь скалярное произведение также надо понимать как произведение комплексных векторов. Напомним, что произведение  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  определено как  $\vec{a} \cdot \vec{b}^*$ , а модуль вектора – как  $\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}^*}$ . Здесь и далее “звездочкой” обозначается комплексное сопряжение. Тогда оказывается, что

$$I(x) = \frac{1}{2} \tilde{E}_0(x) \cdot \tilde{E}_0^*(x). \quad (6.1.6)$$

### Комплексный показатель преломления

Для поглощающей среды ослабление интенсивности в зависимости от пройденного пути описывается законом Бугера (1.2.4). Пусть ослабление вызывается только поглощением (рассеяние отсутствует), т.е.  $\alpha(l) = k(l)$ , и пусть среда однородна, т.е. объемный коэффициент поглощения  $k$  не зависит от координаты. Тогда, учитывая обозначение  $l \equiv x$ , имеем  $I(x) = I(x_0) \exp(-kx)$ . Соответственно, для амплитуды волны соотношение (1.4.4) дает  $2\vec{E}_0(x) = \vec{E}_0(x_0) \exp(-kx/2)$ . Подставим это выражение в комплексную амплитуду (6.1.5) и потребуем, чтобы она имела тот же формальный вид, как если бы вещественная амплитуда волны  $\vec{E}_0(x)$  была постоянной, т.е. как если бы не было поглощения:  $\tilde{E}_0(x) = \vec{E}_0(x_0) \exp(-2\pi i \tilde{m} x/c)$ . Несложные выкладки

(см. подробно в [1,2]) показывают, что для этого надо положить  $\tilde{m} = \tilde{n} - i \frac{kc}{4\pi\nu}$ .

Величина  $\tilde{m} = \tilde{n} - i\tilde{k}$  (где  $\tilde{k} = \frac{kc}{4\pi\nu}$ ) называется комплексным показателем преломления вещества (КПП). Вещественная часть КПП – это обычный показатель преломления  $\tilde{n}$ , а мнимая часть КПП  $\tilde{k}$  характеризует поглощение излучения и определяется объемным коэффициентом поглощения  $k$ . Математический смысл введения КПП состоит в достижении единообразия формы записи электромагнитных волн в средах с поглощением и без него. Использование КПП приводит к тому, что формулы для поглощающих сред могут быть получены из соответствующих формул для сред без поглощения просто формальной заменой  $\tilde{n}$  на  $\tilde{m}$ . Это же относится к комплексной диэлектрической проницаемости среды, равной  $\tilde{m}^2$ . Заметим, что стандартной принятой в оптике формой КПП является именно  $\tilde{m} = \tilde{n} - i\tilde{k}$ . Договоримся далее всегда оперировать именно с комплексной формой записи электромагнитной волны и для краткости опускать знак “тильда” над ее векторами электрической напряженности и амплитуды.

#### Поляризация электромагнитной волны

Рассмотрим поведение вектора напряженности электромагнитной волны в плоскости  $YZ$ , перпендикулярной направлению распространения волны. Из выражения (1.6.5) для проекций этого вектора на координатные оси следует

$$E_y(x, t) = E_{0,y}(x) \exp(2\pi i \nu t + i\delta_y), \quad E_z(x, t) = E_{0,z}(x) \exp(2\pi i \nu t + i\delta_z), \quad (6.1.7)$$

где  $\delta_y$  и  $\delta_z$  – фазы, определяемые значениями проекций при  $t = 0$ . Переходя к вещественным частям (1.6.7), легко убедиться, что они соответствуют гармоническим колебаниям проекций вектора электрической напряженности с одинаковой частотой  $\nu$ . Из механики известно, что сумма подобных колебаний соответствует вращению по эллипсу, и обратно, всякое вращение по эллипсу с постоянной частотой может быть представлено в виде суммы независимых колебаний в двух перпендикулярных направлениях.

Таким образом, конец вектора электрической напряженности в плоскости  $YZ$  описывает эллипс. Характеристики этого эллипса и определяют поляризацию электромагнитной волны. В общем случае поляризация является эллиптической. Если полуоси эллипса равны, т.е. он является окружностью, то поляризация круговая. Вырожденным случаем предельно сжатого эллипса является отрезок. Такая поляризация называется линейной: ей соответствуют колебания вектора электрической напряженности электромагнитной волны, лежащие в одной плоскости. Для эллиптической и круговой поляризации различают направление вращения вектора электрической напряженности, что определяет левую и правую поляризации.

Заметим, что поляризация – это не некое “единое” явление, а именно совокупность геометрических характеристик электромагнитной волны. Ее простое и наглядное механическое толкование приведено в [2]. Причиной поляризации является наличие дополнительной степени свободы для колебаний поперечной волны в трехмерном пространстве: если бы пространство было двумерным – никакой поляризации бы не было.

### Идея параметров Стокса

Эллипс, соответствующий поляризации, может быть полностью описан тремя параметрами: большой и малой полуосями и углом наклона к координатной оси. Эти величины называются эллиптическими параметрами поляризации. Однако, являясь неоднородными (имеющими различный смысл и размерности), они неудобны как для теоретических выкладок, так и для экспериментальных измерений. Поэтому в оптике (в том числе в оптике атмосферы) поляризованное излучение описывают параметрами Стокса – четырьмя величинами, объединяемыми в вектор Стокса. Ниже мы приведем определение каждой из компонент вектора Стокса, но прежде сделаем некоторые замечания.

В силу отмеченных выше свойств гармонических колебаний волна с любой поляризацией может быть разложена на сумму двух независимых линейно поляризованных волн. То есть согласно выражению (6.1.7) при фиксированной для удобства записи координате  $x$  имеем

$$\vec{E}(t) = (\vec{e}_y E_{0,y} \exp(i\delta_y) + \vec{e}_z E_{0,z} \exp(i\delta_z)) \exp(2\pi i \nu t), \quad (6.1.8)$$

где  $\vec{e}_y$  и  $\vec{e}_z$  – единичные векторы осей  $Y$  и  $Z$ .

Параметры Стокса проще всего определять в рамках мысленного эксперимента по измерению интенсивности поляризованного света. При этом свет проходит через специальные устройства – поляризаторы, пропускающие только определенные компоненты разложения электромагнитной волны (6.1.8). В условиях мысленного эксперимента нас не интересует физическая природа и устройство поляризаторов, и, разумеется, все они считаются идеальными. Кроме того, следуя традициям, вместо координатных осей  $Y$  и  $Z$  используют понятия параллельной и перпендикулярной компонент вектора напряженности электрического поля  $E_{\parallel}$  и  $E_{\perp}$ , определяемых ориентацией соответствующих поляризаторов. В нашем случае, в силу произвольности выбора координатных осей и начальных фаз, положим просто  $E_{\parallel} = E_{0,y} \exp(-i\delta_y)$ ,  $E_{\perp} = E_{0,z} \exp(-i\delta_z)$ , т.е. запишем соотношение (6.1.8) в виде

$$\vec{E}(t) = (\vec{e}_y E_{\parallel} + \vec{e}_z E_{\perp}) \exp(2\pi i \nu t). \quad (6.1.9)$$

Поскольку комплексные амплитуды  $E_{\parallel}$  и  $E_{\perp}$  являются декартовыми координатами вектора  $\vec{E}(t)$ , при повороте системы координат на угол  $\beta$  они преобразуются по известным формулам

$$E_{\parallel}(\beta) = E_{\parallel} \cos \beta + E_{\perp} \sin \beta, \quad E_{\perp}(\beta) = -E_{\parallel} \sin \beta + E_{\perp} \cos \beta. \quad (6.1.10)$$

Рассмотрим поворот осей на угол  $\pi/2$ , однако векторы  $\vec{e}_y$  и  $\vec{e}_z$  оставим прежними, изменив для компенсации фазу волны:  $\vec{E}(t) = (\vec{e}_y E_{\perp} - \vec{e}_z E_{\parallel}) \exp(2\pi i \nu t + i\pi/2) = i(\vec{e}_y E_{\perp} - \vec{e}_z E_{\parallel}) \exp(2\pi i \nu t)$ . Возьмем сумму этого выражения с (6.1.9), т.е.  $2\vec{E}(t)$ , и прибавим к ней разность (6.1.9) и полученного выражения, т.е. 0. Легко убедиться, что результат этой операции может быть записан в виде

$$\vec{E}(t) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{e}_y + i\vec{e}_z) \frac{\sqrt{2}}{2} (E_{\parallel} - iE_{\perp}) + \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{e}_y - i\vec{e}_z) \frac{\sqrt{2}}{2} (E_{\parallel} + iE_{\perp}) \right) \exp(2\pi i \nu t). \quad (6.1.11)$$

В полученном выражении векторы  $\sqrt{2}(\vec{e}_y + i\vec{e}_z)/2$  и  $\sqrt{2}(\vec{e}_y - i\vec{e}_z)/2$  имеют единичную длину, т.е. описывают вращение по окружности. При этом легко проверить, разлагая по формуле Эйлера временную зависимость  $\exp(2\pi i \nu t)$ , что скобка  $(\vec{e}_y + i\vec{e}_z)$  соответствует правому вращению, а скобка  $(\vec{e}_y - i\vec{e}_z)$  – левому. Таким образом, выражение (6.1.11) доказывает отнюдь не являющееся наглядным свойство, что волна с любой поляризацией может быть представлена в виде суммы двух независимых волн, поляризованных по правому и левому кругу.

#### **Определения параметров Стокса.**

Первый параметр Стокса  $I$  – это интенсивность излучения. Согласно формуле (6.1.6) имеем

$$I = (E_{\parallel}E_{\parallel}^* + E_{\perp}E_{\perp}^*)/2. \quad (6.1.12)$$

Второй параметр Стокса  $Q$  – это разность интенсивностей излучения, прошедшего вертикальный и горизонтальный линейные поляризаторы. Вертикальным линейным поляризатором будем считать (по определению) тот, который пропускает только компоненту вектора напряженности электрического поля вдоль оси  $Y$ , т.е.  $E_{\parallel}$ , горизонтальным – вдоль оси  $Z$ , т.е.  $E_{\perp}$ . Тогда из разложения на сумму линейно поляризованных волн (6.1.9) и формулы интенсивности (6.1.6) непосредственно следует

$$Q = (E_{\parallel}E_{\parallel}^* - E_{\perp}E_{\perp}^*)/2. \quad (6.1.13)$$

Третий параметр Стокса  $U$  – это разность интенсивностей излучения, прошедшего линейные поляризаторы, повернутые на углы  $+45^\circ$  и  $-45^\circ$  относительно ориентации вертикального поляризатора. Отсюда для  $U$  следует воспользоваться тем же выражением (6.1.13), но только подставив в него новые координаты вектора напряженности электрического поля, которые выражаются через исходные по формулам (6.1.10): вместо  $E_{\parallel} - E_{\perp}(-\pi/4) = \sqrt{2}(E_{\parallel} + E_{\perp})/2$ , вместо  $E_{\perp} - E_{\parallel}(-\pi/4) = \sqrt{2}(E_{\parallel} - E_{\perp})/2$ . В результате получаем

$$U = (E_{\parallel}E_{\perp}^* + E_{\perp}E_{\parallel}^*)/2. \quad (6.1.14)$$

Четвертый параметр Стокса  $V$  – это разность интенсивностей излучения, прошедшего правый и левый круговой поляризаторы. Обращаясь к разложению на сумму круговых поляризованных волн (6.1.11), находим, что правому поляризатору соответствует напряженность электрического поля  $\sqrt{2}(E_{\parallel} - iE_{\perp})/2$ , а левому –  $\sqrt{2}(E_{\parallel} + iE_{\perp})/2$ . Применяя для этих величин формулу интенсивности (6.1.6), получаем

$$V = i(E_{\parallel}E_{\perp}^* - E_{\perp}E_{\parallel}^*)/2. \quad (6.1.15)$$

Параметры Стокса полностью определяют эллипс поляризации, поскольку однозначным образом взаимосвязаны с эллиптическими параметрами. Соответствующие формулы имеются в [12]. Подчеркнем, что несмотря на комплексную форму записи выражений (6.1.12)-(6.1.15) все параметры Стокса – это вещественные числа, что легко проверить, вычислив явно вещественную и мнимую части (6.1.12)-(6.1.15). Среди параметров Стокса только три из них являются независимыми, поскольку из соотношений (6.1.12)-(6.1.15) непосредственно следует тождество

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2. \quad (6.1.16)$$

Укажем также, что инвариантом поворота осей поляризационного базиса является разность  $I^2 - Q^2 - U^2 - V^2$ , следствием чего инвариантом оказывается также и сумма  $Q^2 + U^2$ .

### Линейные преобразования параметров Стокса

Параметры Стокса однородны, т.е. имеют одинаковые размерности и единый физический смысл (разностей интенсивностей). В силу этого, как уже отмечалось выше, они объединяются в вектор Стокса  $\mathbf{L} = (I, Q, U, V)^+$ . Здесь и далее символом “+” обозначается транспонирование матрицы. В данном случае оно нужно только для компактности записи, поскольку вектор Стокса – столбец, но в тексте будет записываться в строку. Любое линейное преобразование вектора Стокса может быть записано в виде умножения его на матрицу:

$$\mathbf{L} = \mathbf{M}\mathbf{L}_0, \quad (6.1.17)$$

где  $\mathbf{L}_0$  – вектор Стокса до преобразования,  $\mathbf{L}$  – вектор Стокса после преобразования,  $\mathbf{M}$  – матрица преобразования размера  $4 \times 4$  (иногда называемая матрицей Мюллера [12]). Соотношение (6.1.17) дает удобный математический аппарат для расчетов поляризованного излучения и фактически сводит проблему указанных расчетов к определению в каждом конкретном случае матрицы  $\mathbf{M}$ .

Пусть комплексные компоненты вектора напряженности электрического поля преобразуются по формулам

$$E_{\parallel} = S_1 E_{\parallel,0} + S_2 E_{\perp,0}, \quad E_{\perp} = S_3 E_{\parallel,0} + S_4 E_{\perp,0}, \quad (6.1.18)$$

где индексом “нуль” обозначены компоненты до преобразования, а  $S_1 - S_4$  – некоторые, в общем случае – комплексные, коэффициенты преобразования. Тогда подставляя (6.1.18) в определения параметров Стокса (6.1.12)-(6.1.15) и группируя члены согласно (6.1.17), можно найти выражения всех элементов матрицы преобразования  $M_{11} - M_{44}$  через коэффициенты  $S_1 - S_4$ .

$$\begin{aligned} M_{11} &= (S_1 S_1^* + S_2 S_2^* + S_3 S_3^* + S_4 S_4^*)/2, & M_{12} &= (S_1 S_1^* - S_2 S_2^* + S_3 S_3^* - S_4 S_4^*)/2, \\ M_{13} &= (S_1 S_2^* + S_1^* S_2 + S_3 S_4^* + S_3^* S_4)/2, & M_{14} &= i(-S_1 S_2^* + S_1^* S_2 - S_3 S_4^* + S_3^* S_4)/2, \\ M_{21} &= (S_1 S_1^* + S_2 S_2^* - S_3 S_3^* - S_4 S_4^*)/2, & M_{22} &= (S_1 S_1^* - S_2 S_2^* - S_3 S_3^* + S_4 S_4^*)/2, \\ M_{23} &= (S_1 S_2^* + S_1^* S_2 - S_3 S_4^* - S_3^* S_4)/2, & M_{24} &= i(-S_1 S_2^* + S_1^* S_2 + S_3 S_4^* - S_3^* S_4)/2, \\ M_{31} &= (S_1 S_3^* + S_1^* S_3 + S_2 S_4^* + S_2^* S_4)/2, & M_{32} &= (S_1 S_3^* + S_1^* S_3 - S_2 S_4^* - S_2^* S_4)/2, \\ M_{33} &= (S_1 S_4^* + S_1^* S_4 + S_2 S_3^* + S_2^* S_3)/2, & M_{34} &= i(-S_1 S_4^* + S_1^* S_4 + S_2 S_3^* - S_2^* S_3)/2, \\ M_{41} &= i(S_1 S_3^* - S_1^* S_3 + S_2 S_4^* - S_2^* S_4)/2, & M_{42} &= i(S_1 S_3^* - S_1^* S_3 - S_2 S_4^* + S_2^* S_4)/2, \\ M_{43} &= i(S_1 S_4^* - S_1^* S_4 + S_2 S_3^* - S_2^* S_3)/2, & M_{44} &= (S_1 S_4^* + S_1^* S_4 - S_2 S_3^* - S_2^* S_3)/2. \end{aligned} \quad (6.1.19)$$

Отметим, что выделяя явно из (6.1.19) вещественную и мнимую части, все элементы матрицы  $M$  – это вещественные числа (соответствующие вещественные выражения полезно получить и использовать на практике для ускорения компьютерных расчетов).

Пусть преобразование вектора Стокса заключается в повороте системы координат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения излучения, на угол  $\beta$ . Тогда преобразование (6.1.18) по форме совпадает с формулой (6.1.10), что согласно формулам (6.1.19) дает для пересчета вектора Стокса по (6.1.17) матрицу вращения

$$\mathbf{M}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\beta & \sin 2\beta & 0 \\ 0 & -\sin 2\beta & \cos 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.1.20)$$

Заметим, что согласно (6.1.20), интенсивность излучения  $I$  не меняется при поворотах системы координат, что очевидно из ее физического смысла [1,2]. Также инвариантом является и четвертый параметр Стокса  $V$ .

Обычно система координат выбирается специальным (удобным) образом [1,2], при котором можно привести соотношения преобразования компонент электрического вектора (6.1.18) к диагональному виду

$$E_{\parallel} = S_1 E_{\parallel,0}, \quad E_{\perp} = S_4 E_{\perp,0}. \quad (6.1.21)$$

Тогда согласно формулам (6.1.19) с учетом того, что для (6.1.21)  $S_2 = S_3 = 0$ , матрица преобразования имеет блочный вид

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 \\ M_{12} & M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & M_{34} \\ 0 & 0 & -M_{34} & M_{33} \end{pmatrix}, \quad (6.1.22)$$

где

$$\begin{aligned} M_{11} &= (S_1 S_1^* + S_4 S_4^*)/2, & M_{12} &= (S_1 S_1^* - S_4 S_4^*)/2, \\ M_{33} &= (S_1 S_4^* + S_1^* S_4)/2, & M_{34} &= i(-S_1 S_4^* + S_1^* S_4)/2. \end{aligned} \quad (6.1.23)$$

То есть матрица (6.1.22) определяется четырьмя элементами (6.1.23), но только три из них независимы, поскольку имеет место тождество

$$M_{11}^2 = M_{12}^2 + M_{33}^2 + M_{34}^2. \quad (6.1.24)$$

### Естественный и поляризованный свет

Выше мы рассматривали поляризацию для некоторой абстрактной электромагнитной волны. В случае естественного излучения (солнечное, тепловое), в атмосфере всегда есть совокупность волн, испускаемых как разными источниками, так и в разные моменты времени. Указанные волны некогерентные как в пространстве, так и во времени (см. подробнее [1,2]). В простой и наглядной интерпретации это означает, что эллипсы поляризации от различных точек источников излучения и в различные моменты времени ориентированы хаотически. Проведя для такого излучения мысленные эксперименты по измерению параметров Стокса (6.1.12)-(6.1.15) за реальное время измерений (см. раздел 1.1), получим, что все разности интенсивностей равны нулю в силу хаотической ориентации эллипсов поляризации. То есть вектор Стокса равен  $(I, 0, 0, 0)^+$ . Такое излучение называется неполяризованным или естественным. В противоположность ему излучение, все эллипсы которого ориентированы одинаково, называется полностью поляризованным. Заметим, что во избежание формальных противоречий, для параметров Стокса этих двух типов излучения следовало бы использовать разные обозначения, но это не принято. Промежуточный, и в то же время общий случай, составляет частично поляризованное излучение, которое можно рассматривать как сумму с определенными весами неполяризованного и полностью поляризованного.

Неполяризованное излучение характеризуется одним параметром – интенсивностью  $I$  и для него соотношение между параметрами Стокса (6.1.16)

не выполняется (см. выше замечание об обозначениях). Для полностью поляризованного излучения, наоборот (6.1.16) выполняется, следовательно для описания излучения достаточно трех параметров  $Q$ ,  $U$ ,  $V$ . Тогда для описания любого излучения (частично поляризованного – суммы естественного и поляризованного) нужны все четыре параметра Стокса, которые в общем случае уже независимы.

Отношение частей выражения (6.1.16)

$$P = \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2} / I \quad (6.1.25)$$

называется степенью поляризации и характеризует долю поляризованного излучения. Для частично поляризованного излучения  $0 \leq P \leq 1$ ;  $P=0$  для неполяризованного света и  $P=1$  для полностью поляризованного. Достаточно распространенным частным случаем является преобразование исходного неполяризованного света блочной матрицей вида (6.1.22). Тогда, если  $I_0$  – интенсивность исходного излучения, то после преобразования  $I = M_{11}I_0$ ,  $Q = M_{12}I_0$ , что дает при подстановке в (6.1.25)

$$P = |M_{12}| / M_{11}. \quad (6.1.26)$$

При использовании формулы (6.1.26) следует не забывать о том, что она справедлива лишь для указанного частного случая. Определение (6.1.26) совпадает с часто используемым в практических измерениях понятием степени линейной поляризации (см. подробно в [1,2]). Нередко в (6.1.26) опускают модуль у  $M_{12}$  и рассматривают как положительные, так и отрицательные значения степени поляризации.

#### **О математической модели прибора, измеряющего параметры Стокса**

Поскольку параметры Стокса определены как разности интенсивностей, при математическом моделировании их измерений не возникает новых проблем. С другой стороны, можно преобразовать применительно к вектору Стокса формальную модель измерительного прибора, описанную в разделе 1.1. Действительно, в исходной формуле (1.1.11) достаточно заменить интенсивность  $I(s, \omega, \lambda, t)$  на вектор Стокса  $\mathbf{L}(s, \omega, \lambda, t)$ , соответственно вместо аппаратной функции прибора  $f(s, \omega, \lambda, t)$  возникнет матрица из подобных функций размера  $4 \times 4$ , а выходной сигнал  $Y$  также станет вектором из четырех компонент. Далее следует просто повторить все упрощающие рассуждения раздела 1.1 и прийти к формуле (1.1.14) с заменой  $I(\lambda)$  на  $\mathbf{L}(\lambda)$  и спектральной аппаратной функции  $f(\lambda)$  на соответствующую матрицу аппаратных функций. Последним, уже новым упрощением, будет приближение независимости измерений компонент вектора Стокса, соответствующее использованию идеальных поляризаторов, при котором матрицу аппаратных функций можно считать диагональной. В этом приближении для каждой компоненты измеряемого вектора Стокса можно перейти к нормированной форме (1.1.15) и использовать для интегрирования по (1.1.15) как без учета поляризации, так и с учетом ее единообразные алгоритмы (см. главу 5).



## 6.2. Физические процессы, приводящие к появлению поляризованного излучения в атмосфере

### Источники излучения и процессы его переноса

Рассмотрим теперь, следуя логике раздела 1.2, общую постановку задачи переноса излучения с учетом его поляризации. В классической оптике атмосферы мы имеем дело с исходными источниками неполяризованного излучения (свет Солнца на верхней границе атмосферы и равновесное тепловое излучение атмосферы и поверхности). Следовательно, если поляризация вообще должна появиться, то она будет определяться процессами взаимодействия излучения с атмосферой и поверхностью. Как очевидно из предыдущего раздела (см. также [1,2]), проявления свойств поляризации возникают при наличии анизотропии взаимодействия излучения с веществом. Рассмотрим с учетом этого утверждения три процесса взаимодействия, изучаемых теорией переноса: поглощение, рассеяние излучения и его взаимодействие с поверхностью.

### Поглощение излучения

Оно изотропно, следовательно, характеристики колебаний вектора электрической напряженности электромагнитной волны – эллипс поляризации – не влияют на величину поглощения. Задавая для элементарного объема воздуха объемный коэффициент поглощения  $k$  и проделывая мысленные эксперименты по измерению параметров Стокса (6.1.12)-(6.1.15), получим, что все интенсивности будут уменьшаться одинаково. Следовательно, матрица преобразования поляризованного излучения (6.1.17) для процессов поглощения – матрица поглощения, обозначим ее  $\mathbf{k}$ , будет диагональной

$$\mathbf{k} = k\mathbf{1}, \quad (6.2.1)$$

где  $\mathbf{1}$  – единичная матрица (размера  $4 \times 4$ ).

Существует лишь одно исключение из указанной изотропии поглощения. В верхних слоях атмосферы и микроволновом (МКВ) диапазоне спектра из-за малой полуширины линий молекулярного поглощения начинает сказываться эффект Зеемана – расщепление линий в магнитном поле Земли. В этом случае возникает анизотропия поглощения, т.е. его зависимость от ориентации направления вектора напряженности электромагнитной волны излучения относительно вектора земного магнитного поля. Однако это довольно экзотический случай, кроме того сам эффект невелик (порядка процентов). Поэтому на практике даже при учете эффекта Зеемана в МКВ диапазоне матрицу поглощения  $\mathbf{k}$  все равно считают диагональной, полагая, что в ней зависимость элементов от угла между направлением излучения и магнитным полем, является несколько разной для разных компонент вектора Стокса.

Итак, общий вывод – матрица поглощения всегда диагональная.

### Рассеяние прямого излучения

Рассеяние является существенно анизотропным даже в простейшем случае чисто молекулярного рассеяния [1,2]. Ниже мы вернемся к этому факту, но пока рассмотрим рассеяние как процесс ослабления прямого излучения (см. начало раздела 1.2). При выводе дифференциального уравнения переноса излучения (1.2.1), приведенного в [1,2], процесс рассеяния рассматривается лишь как убыль энергии излучения, как составная часть ослабления. То есть ослабление за счет рассеяния – это просто “уход” энергии интенсивности из прямого излучения в боковые направления, но, обратим особое внимание, это

не есть рассеяние на нулевой угол. Иными словами, прямое излучение не содержит рассеянного излучения! (См. раздел 2.1 о логике перехода от соотношений (2.1.7) к соотношениям (2.1.8)). Но тогда, задав для элементарного объема воздуха объемный коэффициент рассеяния  $\sigma$ , и проделав мысленные эксперименты по измерению параметров Стокса (6.1.12)-(6.1.15), как и в случае с поглощением, опять получим, что все интенсивности будут уменьшаться одинаково.

#### **Ослабление прямого излучения**

Следовательно, для процессов ослабления прямого излучения все остается по-прежнему. Объемный коэффициент ослабления  $\alpha$  равен сумме (2.1.1),  $\alpha = k + \sigma$ , а матрица ослабления есть его произведение на единичную матрицу

$$\mathbf{a} = \alpha \mathbf{1}. \quad (6.2.2)$$

Соответственно, при ослаблении прямого излучения для каждого отдельного параметра Стокса справедлив закон Бугера (1.2.2), и остаются в силе понятия функции пропускания (1.2.3) - (1.2.6), оптического пути (1.2.4) и оптической толщины (1.2.7).

#### **Равновесное тепловое излучение атмосферы**

Оно, как процесс, находящийся в термодинамическом равновесии с поглощением излучения элементарным объемом атмосферы, также изотропно. Следовательно, аналог объемного коэффициента излучения в (1.2.1), который можно назвать вектором излучения, для равновесного теплового излучения будет иметь вид  $(\varepsilon_\lambda, 0, 0, 0)^+$ . Значение  $\varepsilon_\lambda$  определяется законом Кирхгофа (1.3.4) с учетом функции Планка (1.3.5). Таким образом, тепловое излучение атмосферы поляризации не порождает.

#### **Рассеянное излучение в атмосфере**

Рассмотрим теперь, следуя логике раздела 2.1, рассеяние излучения на некоторый угол  $\gamma$ . Для бесконечно малого объема среды, для которого выводится дифференциальное уравнение переноса излучения [1,2], рассеяние можно трактовать как единичный элементарный процесс. Но тогда для него справедливо рассмотренное в предыдущей главе преобразование векторов Стокса (6.1.17), в котором матрица преобразования носит специальное название – матрица рассеяния, обозначим ее  $\mathbf{X}$ .

Матрица рассеяния уже не является диагональной, ниже мы приведем примеры ее конкретного вида, но прежде сделаем ряд общих замечаний. Как и в разделе 2.1, будем рассматривать лишь матрицы рассеяния, зависящие угла рассеяния  $\gamma$ , но не от азимута рассеяния. Для частного случая неполяризованного излучения из (6.1.17) мы должны получить соотношения раздела 2.1, откуда следует равенство  $X_{11}(\gamma) = x(\gamma)$ , где  $x(\gamma)$  – индикатриса рассеяния. Таким образом, матрица рассеяния оказывается тесным образом связанной с обычной индикатрисой рассеяния (поэтому для нее и выбрано аналогичное обозначение  $\mathbf{X}(\gamma)$ ). Из условия нормировки для индикатрисы (2.1.2) вытекает и условие нормировки всей матрицы рассеяния:

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi X_{11}(\gamma) \sin \gamma d\gamma = 1, \quad (6.2.3)$$

т.е. матрица рассеяния должна быть всегда “устроена” таким образом, чтобы для ее элемента  $X_{11}(\gamma)$  выполнялось соотношение (6.2.3).

Рассмотрим теперь два основных процесса рассеяния излучения в атмосфере: молекулярное и аэрозольное.

Матрица молекулярного рассеяния. Вывод формул для ее элементов приведен в [2]. При определенном выборе системы координат (6.1.21), а именно когда вектор  $E_{\parallel}$  электромагнитной волны лежит в плоскости рассеяния (т.е. плоскости, образованной направлениями – векторами исходного и рассеянного излучения), а вектор  $E_{\perp}$ , соответственно, перпендикулярен этой плоскости, матрица молекулярного рассеяния имеет наиболее простой вид (6.1.22). Записав ее сразу с учетом уточняющего множителя (см. раздел 2.2, соотношение (2.2.18)), имеем

$$\mathbf{X}(\gamma) = \frac{3}{4 + 2\delta} \begin{pmatrix} 1 + \delta + (1 - \delta)\cos^2 \gamma & -\sin^2 \gamma & 0 & 0 \\ -\sin^2 \gamma & 1 + \cos^2 \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (6.2.4)$$

Для получения “классического” вида (6.2.4) достаточно положить  $\delta = 0$ .

Из (6.2.4) следует, что естественный свет, испытавший молекулярное рассеяние, становится поляризованным, т.е. для него возникает ненулевое значение второго параметра Стокса  $Q$ . Подробно поляризация при молекулярном рассеянии рассмотрена в [2]. Отметим, что реально в произвольной системе координат при молекулярном рассеянии естественного света возникает и компонента  $U$  вектора Стокса (из-за умножения на матрицу вращения (6.1.20)), а вот компонента  $V$  возникнуть никак не может. Впрочем, для рассеяния солнечного излучения этот любопытный факт имеет чисто теоретическое значение из-за неизбежного искажения картины молекулярного рассеяния атмосферным аэрозолем.

Матрица аэрозольного рассеяния. Для частиц, форма которых моделируется сферами, в той же системе координат, что рассмотрена выше, матрица аэрозольного рассеяния имеет вид (6.1.21)-(6.1.22), соотношения для ее элементов в случае однородных частиц (формулы теории Ми), приведены в [2]. В отличие от случая молекулярного рассеяния для матрицы (6.1.21) с учетом вращения при переходе к произвольной системе координат (6.1.20) при рассеянии исходного неполяризованного света возникают уже все четыре компоненты вектора Стокса.

### **Отражение излучения от поверхности**

Вновь, сохраняя логику изложения данного пособия, начнем рассмотрение отражения с двух простейших, но практически очень важных моделей, а потом перейдем к общему случаю.

Изотропное отражение. Оно, как явствует из названия, не должно влиять на поляризацию (напомним, поляризация – это проявление анизотропии взаимодействия излучения с объектами [1,2]). Поэтому для данной модели интенсивность отраженного излучения, как и прежде, не зависит от поляризации и определяется через падающий на поверхность поток соотношением (1.4.7). Здесь следует подчеркнуть, что поток излучения определен как энергия (раздел 1.1) и никак не связан с поляризацией, т.е. он выражается по (1.1.10)-(1.1.13) исключительно через первый элемент вектора Стокса, независимо от значения остальных.

Таким образом, при изотропном отражении естественного излучения поляризация возникать не должна. Для модели отражения исходно уже

поляризованного излучения применяют стандартный для задач с поляризацией чисто математический прием – требуется, чтобы модель содержала в качестве частного случая соотношение для неполяризованного излучения (1.4.7). Это, с учетом (1.1.13), дает

$$\mathbf{L}^{(r)} = \frac{A}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi/2} \mathbf{L}(\mathcal{G}', \varphi') \cos \mathcal{G}' \sin \mathcal{G}' d\mathcal{G}', \quad (6.2.5)$$

где  $\mathbf{L}(\mathcal{G}', \varphi')$  – вектор Стокса падающего на поверхность излучения с зенитным углом  $\mathcal{G}'$  и азимутом  $\varphi'$ ,  $\mathbf{L}^{(r)}$  – вектор Стокса отраженного излучения (от направления отражения не зависит),  $A$  – альбедо поверхности, интеграл от вектора понимается как четыре независимых интеграла каждой его компоненты, часть переменных из (1.4.7) в уравнениях (6.2.5) опущена.

Идеальное зеркальное отражение. Для него все определяется хорошо известными законами: направления – векторы падающего, отраженного излучения и нормали к поверхности лежат в одной плоскости, которую назовем плоскостью рассеяния; угол отражения равен углу падения. Выбирая вектор  $E_{\parallel}$  в плоскости рассеяния, а вектор  $E_{\perp}$ , соответственно, перпендикулярно ей, получаем коэффициенты связи комплексных амплитуд отраженной и падающей электромагнитных волн (6.1.21) по формулам Френеля, которые мы для практического удобства сразу запишем через угол падения  $\mathcal{G}$ :

$$S_1 = \frac{\tilde{m}^2 \cos \mathcal{G} - \sqrt{\tilde{m}^2 - 1 + \cos^2 \mathcal{G}}}{\tilde{m}^2 \cos \mathcal{G} + \sqrt{\tilde{m}^2 - 1 + \cos^2 \mathcal{G}}}, \quad S_4 = \frac{\cos \mathcal{G} - \sqrt{\tilde{m}^2 - 1 + \cos^2 \mathcal{G}}}{\cos \mathcal{G} + \sqrt{\tilde{m}^2 - 1 + \cos^2 \mathcal{G}}}, \quad (6.2.6)$$

где  $\tilde{m}$  – комплексный показатель преломления вещества поверхности.

Соотношения Френеля (6.2.6) полностью определяют матрицу идеального зеркального отражения по формулам (6.1.22)-(6.1.23). Отметим, что, во-первых, исходный неполяризованный свет после идеального зеркального отражения становится уже поляризованным, во-вторых, частным случаем (6.2.6) и (6.1.23) является коэффициент зеркального отражения (1.4.6) – соотношение для интенсивностей, в-третьих, при переходе к другой системе координат, векторы Стокса преобразуются матрицей вращения (6.1.20), причем одинаковой и для падающего, и для отраженного излучения.

Произвольное отражение. В этом случае, очевидно, для поляризованного излучения необходим матричный аналог введенного в разделе 2.4 двунаправленного коэффициента отражения. Тогда имеем модель отражения

$$\mathbf{L}^{(r)}(\mathcal{G}, \varphi) = \mathbf{R}(\mathcal{G}, \mathcal{G}', \varphi - \varphi') \mathbf{L}(\mathcal{G}', \varphi'), \quad (6.2.7)$$

где  $\mathbf{L}(\mathcal{G}', \varphi')$  – вектор Стокса падающего на поверхность излучения из направления с зенитным углом  $\mathcal{G}'$  и азимутом  $\varphi'$ ;  $\mathbf{L}^{(r)}(\mathcal{G}, \varphi)$  – вектор Стокса отраженного излучения в направлении  $(\mathcal{G}, \varphi)$ ,  $\mathbf{R}(\mathcal{G}, \mathcal{G}', \varphi - \varphi')$  – матрица двунаправленного отражения. Отметим, что в принципе для разных направлений  $(\mathcal{G}', \varphi')$ ,  $(\mathcal{G}, \varphi)$  возникает задача преобразования координат поляризации падающего и отраженного излучения, которая будет рассмотрена в следующем разделе. Однако как будет там же и показано, ее решение в итоге определяется только самими направлениями  $(\mathcal{G}', \varphi')$  и  $(\mathcal{G}, \varphi)$ , поэтому будем для удобства считать, что указанное преобразование координат уже “встроено” в матрицу отражения  $\mathbf{R}(\mathcal{G}, \mathcal{G}', \varphi - \varphi')$ .

### **Собственное излучение поверхности**

Для поляризованного излучения оно формально должно быть задано как вектор из четырех элементов – параметров Стокса  $\mathbf{L}^{(t)} = (I^{(t)}, Q^{(t)}, U^{(t)}, V^{(t)})^+$ . В принципе, модели задания этого вектора могут быть самыми различными. Вернемся вновь в раздел 1.4 и сопоставим описание поляризации с приведенными там простейшими вариантами.

Для изотропного равновесного излучения поляризация возникать не должна, поэтому имеем для интенсивности  $I^{(t)}$  соотношение (1.4.8) и нули для остальных трех компонент вектора  $\mathbf{L}^{(t)}$ . При этом для излучательной способности поверхности можно использовать как выражение (1.4.9), так и (1.4.12).

Ряд экспериментов показывают, что при собственном излучении иногда (в зависимости от спектрального диапазона и типа поверхности) возникает слабая линейная поляризация. В этом случае ненулевым полагают еще и второй элемент  $Q^{(t)}$  (для которого уже необходимо задать конкретную систему координат в плоскости, перпендикулярной направлению излучения).

### **Общий обзор процессов поляризации в атмосфере**

В качестве заключения этого раздела оглянемся назад и приведем, в слегка ироничном стиле “памятки по поляризации при переносе излучения”, список процессов по мере убывания их требований к учету поляризации излучения.

Рассеяние с изменением направления – всегда!

Отражение от поверхности – достаточно часто.

Собственное излучение поверхности – весьма редко.

Поглощение – почти никогда!

Собственное излучение атмосферы – никогда!

## **6.3. Учет поляризации в теории переноса излучения**

### **Перенос теплового излучения без рассеяния**

Рассмотрим сразу задачу переноса теплового излучения без учета рассеяния (раздел 1.1), поскольку просто ослабление и отражение прямого излучения есть ее частный случай.

Для прямого теплового излучения, как отмечено в предыдущем разделе, поляризация возникает лишь при отражении от поверхности и (в определенных моделях) для собственного излучения поверхности. То есть в единичном процессе на поверхности. Отсюда сразу следуют два важных вывода.

Во-первых, учет поляризации существенен лишь для излучения, идущего из нижней полусферы (например, при спутниковых измерениях). Во-вторых, после моделирования излучения поверхности (отраженного и собственного) для каждой компоненты вектора Стокса задача переноса излучения решается отдельно (см. раздел 1.4), причем для интенсивности – с учетом собственного излучения атмосферы, а для остальных компонент вектора Стокса – только как ослабление по закону Бугера. (Следовательно, на практике надо сначала решить задачу для интенсивности, а потом просто воспользоваться уже полученной в ней функцией пропускания.)

Отметим, что для стандартных моделей взаимодействия неполяризованного излучения с поверхностью (см. предыдущий раздел) при выборе соответствующей системы координат (в плоскости отражения)

возникает лишь одна компонента поляризации, поляризация является линейной. Поэтому в указанном классе задач оперируют не всем вектором Стокса, а лишь двумя компонентами интенсивности (горизонтальной и вертикальной), полностью описывающих поляризованное излучение. В их определениях нет достаточно четкой терминологии и формализма, в разных монографиях и практических задачах она разная. Поэтому констатируя указанную возможность, не будем вдаваться в ее детали, как чисто технические, полагая, что, если потребуется для конкретной модели измерений, читатель сам сможет разобраться в этих особенностях на основе материала разделов 6.1 и 6.2.

### **Уравнение переноса рассеянного солнечного излучения в плоскопараллельной атмосфере с учетом поляризации**

Теперь вернемся к материалу раздела 2.1 и модифицируем его для случая поляризованного излучения.

Для начала надо формально заменить в дифференциальном уравнении переноса излучения (1.2.1) интенсивность и объемный коэффициент излучения на вектора Стокса, а скалярные коэффициенты взаимодействия – на матрицы. Для случая рассеяния (2.1.3) объемный коэффициент излучения определялся интенсивностью, этот случай должен остаться частным при учете поляризации, следовательно аналог (2.1.3) для поляризованного излучения должен иметь вид

$$\frac{d\mathbf{L}}{dl} = -\mathbf{a}\mathbf{L} + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{4\pi} \mathbf{G}(\omega)\mathbf{L}(\omega)d^2\omega, \quad (6.3.1)$$

где  $\mathbf{L}$  – вектор Стокса излучения,  $\mathbf{G}$  – некоторая матрица, которую назовем совокупной матрицей рассеяния и структуру которой нам предстоит определить. Обратим внимание, что (6.3.1) – это на самом деле не одно уравнение, а система четырех уравнений для четырех компонент вектора Стокса (в произведении  $\mathbf{G}(\omega)\mathbf{L}(\omega)$  в каждой строке стоит сумма различных компонент).

Далее повторяя рассуждения раздела 2.1, введем конкретные координаты для плоской модели атмосферы – получим из (6.3.1) аналог уравнения (2.1.4). Учитывая, что, как показано в предыдущем разделе 6.2, матрица ослабления  $\mathbf{a}$  является диагональной, с полученным уравнением можно проделать все те же манипуляции, что и с (2.1.4): перейти, как к координате, к оптической глубине, к косинусам вместо зенитных углов, выделить отдельно прямое излучение, игнорировать отраженное. В итоге мы получим векторный аналог уравнения (2.1.8)

$$\begin{aligned} \eta \frac{d\mathbf{L}(\tau, \eta, \varphi)}{d\tau} = & -\mathbf{L}(\tau, \eta, \varphi) + \frac{\Lambda(\tau)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 \mathbf{G}(\tau, \eta, \varphi, \eta', \varphi') \mathbf{L}(\tau, \eta', \varphi') d\eta' + \\ & + \frac{\Lambda(\tau)S}{4} \mathbf{G}(\tau, \eta, \varphi, \eta_0, \varphi_0) (1, 0, 0, 0)^+ \exp(-\tau/\eta_0) \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

с теми же, аналогичными (2.1.9), граничными условиями

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(0, \eta, \varphi) = 0, & \text{ если } \eta > 0, \\ \mathbf{L}(\tau_0, \eta, \varphi) = 0, & \text{ если } \eta < 0. \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Для полного определения уравнения (6.3.2) осталось выяснить смысл и структуру совокупной матрицы рассеяния  $\mathbf{G}$ .

Очевидно, матрица  $\mathbf{G}$  должна определяться матрицами молекулярного (6.2.4) и аэрозольного рассеяния, рассмотренными в предыдущем разделе. Точнее, их средневзвешенной суммой с учетом соответствующих объемных коэффициентов рассеяния [1,2]. Таким образом, матрица рассеяния

(молекулярного плюс аэрозольного) должна иметь вид (6.1.22). Но, к сожалению, не все так просто. Вспомним, что матрицы вида (6.1.22) и (6.2.4) получаются только в специально выбранной системе координат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения излучения. В нашем случае в интегральном члене уравнения (6.3.2) такой выбор невозможен, поскольку направления излучения в интеграле различные. Таким образом, нам необходимо, во-первых, выбрать единую систему координат для учета поляризации, во-вторых, преобразовать к ней матрицу рассеяния вида (6.1.22).

#### **Единая система координат для описания поляризации излучения**

Итак, для описания поляризации необходимо выбрать единую для всех направлений рассеянного излучения систему координат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения излучения  $(\eta, \varphi)$ . Стандартно в теории переноса излучения [13] направление  $E_{\parallel}$  выбирают в указанной плоскости на точку ее пересечения с осью “зенит-надир”. В строгой формулировке:  $E_{\parallel}$  направлено из точки  $(z, \vartheta, \varphi)$  вдоль разности выходящих из центра сферических координат векторов длиной  $z/\eta$  с направлением  $(0,0)$  и вектора длиной  $z$  с направлением  $(\vartheta, \varphi)$ . Направление  $E_{\perp}$ , соответственно, находится в указанной плоскости перпендикулярно  $E_{\parallel}$ , образуя правую систему координат. Отметим, что такой выбор не снижает общности, поскольку при любой другой ориентации поляризационных векторов (например, в конкретном эксперименте) параметры Стокса пересчитываются матрицей вращения (6.1.20).

#### **Вращения системы координат при описании рассеяния излучения**

Теперь, после выбора единой системы координат, задача получения совокупной матрицы рассеяния в уравнении (6.3.2) становится достаточно простой. Надо: (1) преобразовать вектор Стокса, пересчитав координаты единой системы в координаты плоскости рассеяния (см. раздел 6.2); (2) умножить получившийся вектор Стокса на матрицу рассеяния простого вида (6.1.22); (3) обратно преобразовать вектор Стокса, пересчитав координаты из плоскости рассеяния в единую систему. В виде математической формулы указанный пересчет будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{G}(\tau, \eta, \varphi, \eta', \varphi') = \mathbf{M}(\beta) \mathbf{X}(\tau, \chi) \mathbf{M}(\beta'), \quad (6.3.4)$$

где  $\beta'$  – угол первого поворота системы координат от направления  $(\eta', \varphi')$  к плоскости рассеяния,  $\beta$  – угол второго поворота системы координат от плоскости рассеяния к направлению  $(\eta, \varphi)$ ,  $\mathbf{M}(\beta')$  и  $\mathbf{M}(\beta)$  – матрицы вращения (6.1.20),  $\chi$  – косинус угла рассеяния, напомним

$$\chi = \eta\eta' + \sqrt{(1-\eta^2)(1-\eta'^2)} \cos(\varphi - \varphi'). \quad (6.3.5)$$

Для нахождения углов поворота  $\beta'$  и  $\beta$  можно не прибегать к громоздким рисункам и тригонометрическим теоремам, а воспользоваться методами аналитической геометрии [13]. Рассеяние есть изменение направления излучения с  $(\eta', \varphi')$  на  $(\eta, \varphi)$ . Перейдем к декартовым координатам. Ось “зенит-надир” имеет координаты  $(0,0,z)$ , направления  $(\eta', \varphi')$  и  $(\eta, \varphi)$  имеют координаты  $(z\sqrt{1-\eta'^2} \cos \varphi', z\sqrt{1-\eta'^2} \sin \varphi', z\eta')$  и  $(z\sqrt{1-\eta^2} \cos \varphi, z\sqrt{1-\eta^2} \sin \varphi, z\eta)$ , соответственно. Направление  $E_{\parallel}$  до рассеяния согласно приведенному выше определению есть вектор

$\vec{r}_1 = (-z\sqrt{1-\eta'^2} \cos \varphi', -z\sqrt{1-\eta'^2} \sin \varphi', z/\eta' - z\eta')$ . Плоскость рассеяния – это плоскость, образованная направлениями  $(\eta', \varphi')$  и  $(\eta, \varphi)$ : именно в ней лежит вектор  $E_{\parallel}$ , для которого определена матрица рассеяния  $\mathbf{X}(\tau, \chi)$ . Но тогда, заменяя в определении ось “зенит-надир” на  $(\eta, \varphi)$  и учитывая, что косинус угла для новой оси есть  $\chi$ , получаем для направления указанного вектора  $\vec{r}_2 = (\frac{z}{\chi}\sqrt{1-\eta^2} \cos \varphi - z\sqrt{1-\eta^2} \cos \varphi', \frac{z}{\chi}\sqrt{1-\eta^2} \sin \varphi - z\sqrt{1-\eta^2} \sin \varphi', z\eta/\chi - z\eta')$ .

Угол между двумя векторами определяется через их скалярное произведение, таким образом  $\cos \beta' = \frac{\vec{r}_1 \vec{r}_2}{\sqrt{r_1} \sqrt{r_2}}$ . После несложных выкладок (которые здесь и

далее рекомендуем проделать читателю) с учетом (6.3.5) получаем

$$\cos \beta' = \frac{\eta\sqrt{1-\eta'^2} - \eta'\sqrt{1-\eta^2} \cos(\varphi - \varphi')}{\sqrt{1-\chi^2}}. \quad (6.3.6)$$

Для нахождения угла  $\beta$  надо аналогично рассматривать проекции направления после рассеяния  $(\eta, \varphi)$  на ось “зенит-надир” и на направление  $(\eta', \varphi')$ . В результате имеем

$$\cos \beta = \frac{\eta'\sqrt{1-\eta^2} - \eta\sqrt{1-\eta'^2} \cos(\varphi - \varphi')}{\sqrt{1-\chi^2}}. \quad (6.3.7)$$

Полезно найти из (6.3.6)-(6.3.7) квадрат синуса соответствующих углов:

$$\sin^2 \beta' = \frac{(1-\eta'^2) \sin^2(\varphi - \varphi')}{1-\chi^2}, \quad \sin^2 \beta = \frac{(1-\eta^2) \sin^2(\varphi - \varphi')}{1-\chi^2}. \quad (6.3.8)$$

Вычисления по (6.3.8) проще, чем по (6.3.6)-(6.3.7). Заметим, что из (6.3.8) следует, что  $\sin \beta \sin \gamma = \sin \vartheta \sin(\varphi - \varphi')$  – это известная теорема синусов для сферических треугольников. Для косинуса и синуса двойных углов, фигурирующих в матрицах вращения (6.1.20), упрощений в выражениях не возникает. Поэтому используются стандартные тригонометрические формулы

$$\begin{aligned} \cos 2\beta &= 1 - 2\sin^2 \beta = 2\cos^2 \beta - 1, \\ \sin 2\beta &= 2\text{sign}(\varphi - \varphi') \sqrt{\sin^2 \beta (1 - \sin^2 \beta)} = 2\cos \beta \sqrt{1 - \cos^2 \beta} \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

и аналогичные выражения для  $\cos 2\beta'$  и  $\sin 2\beta'$ , где  $\text{sign}(\varphi)$  – функция знака аргумента.

### Совокупная матрица рассеяния

Учитывая наличие в перемножаемых матрицах (6.3.4) достаточного числа нулей (см. (6.1.20)-(6.1.22)), для практических вычислений удобно найти элементы совокупной матрицы рассеяния в явном виде. Обозначая  $c = \cos 2\beta$ ,  $c' = \cos 2\beta'$ ,  $s = \sin 2\beta$ ,  $s' = \sin 2\beta'$  и опуская для краткости остальные переменные, получаем

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} X_{11} & c'X_{12} & s'X_{12} & 0 \\ cX_{12} & cc'X_{11} - ss'X_{33} & cs'X_{11} + c'sX_{33} & sX_{34} \\ -sX_{12} & -c'sX_{11} - cs'X_{33} & -ss'X_{11} + cc'X_{33} & cX_{34} \\ 0 & s'X_{34} & -c'X_{34} & X_{33} \end{pmatrix}. \quad (6.3.10)$$



Отметим, что  $G_{11} = X_{11}$ , то есть индикатрису рассеяния повороты системы координат не меняют. Однако согласно уравнению переноса (6.3.2), естественное излучение Солнца после первого рассеяния становится поляризованным (внеинтегральный член), и далее, начиная со второго рассеяния, интенсивность излучения определяется уже не только индикатрисой  $X_{11}$ , но всей совокупной матрицей рассеяния (6.3.10). Следовательно, даже если нас интересует только интенсивность, найти ее без учета поляризации, строго говоря, нельзя. Таким образом, вся теория переноса излучения с учетом многократного рассеяния, но без учета поляризации, назовем ее “скалярной”, элементы и численные методы которой изложены в главах 2-4, является всего лишь приближенной. (Факт, о котором не часто упоминают в пособиях и монографиях.)

### Функция вектора Стокса источников

Далее для уравнения переноса (6.3.2) можно пытаться идти уже проторенным путем скалярной теории, вводя понятие функции вектора Стокса источников для поляризованного излучения  $\mathbf{V}(\tau, \eta, \varphi)$  и записав (6.3.2) в виде

$$\begin{aligned} \eta \frac{d\mathbf{L}(\tau, \eta, \varphi)}{d\tau} &= -\mathbf{L}(\tau, \eta, \varphi) + \mathbf{V}(\tau, \eta, \varphi), \\ \mathbf{V}(\tau, \eta, \varphi) &= \frac{\Lambda(\tau)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 \mathbf{G}(\tau, \eta, \varphi, \eta', \varphi') \mathbf{L}(\tau, \eta', \varphi') d\eta' + \\ &+ \frac{\Lambda(\tau)S}{4} \mathbf{G}(\tau, \eta, \varphi, \eta_0, \varphi_0) (1, 0, 0, 0)^+ \exp(-\tau/\eta_0), \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

где второе слагаемое в  $\mathbf{V}(\tau, \eta, \varphi)$  описывает вклад в излучение за счет однократного рассеяния, а первое – за счет многократного.

Первое соотношение в (6.3.11) – уравнение, в котором параметры Стокса, как неизвестные переменные, формально разделяются. Следовательно, можно записать выражение искомого вектора Стокса через функцию источников, аналогичное выражению для интенсивности (2.1.13), просто формально заменив в (2.1.13) скаляры на векторы

$$\mathbf{L}(\tau, \eta, \varphi) = -\frac{1}{\eta} \int_{\tau}^b \mathbf{V}(\tau', \eta, \varphi) \exp\left(-\left|\frac{\tau - \tau'}{\eta}\right|\right) d\tau', \quad (6.3.12)$$

где  $b = 0$ , если  $\eta > 0$  и  $b = \tau_0$ , если  $\eta < 0$ . Таким образом, задача расчета вектора Стокса поляризованного излучения вновь сводится к нахождению векторной функции источников  $\mathbf{V}(\tau, \eta, \varphi)$ .

### Приближение однократного рассеяния

Рассмотрим отдельно решение задачи в приближении однократного рассеяния, то есть для случая пренебрежения первым слагаемым для  $\mathbf{V}(\tau, \eta, \varphi)$  по сравнению со вторым. Учитывая явный вид совокупной матрицы рассеяния (6.3.10), имеет смысл выписать и полный явный вид указанного решения:

$$\begin{aligned} I(\tau, \eta, \varphi) &= \left| \frac{S}{4\eta} \int_{\tau}^b \Lambda(\tau') X_{11}(\tau', \chi_0) \exp\left(-\frac{\tau'}{\eta_0} - \left|\frac{\tau - \tau'}{\eta}\right|\right) d\tau' \right|, \\ Q(\tau, \eta, \varphi) &= -\frac{Sc_0}{4\eta} \int_{\tau}^b \Lambda(\tau') X_{12}(\tau', \chi_0) \exp\left(-\frac{\tau'}{\eta_0} - \left|\frac{\tau - \tau'}{\eta}\right|\right) d\tau', \end{aligned}$$

$$U(\tau, \eta, \varphi) = \frac{S S_0}{4\eta} \int_{\tau}^b \Lambda(\tau') X_{12}(\tau', \chi_0) \exp\left(-\frac{\tau'}{\eta_0} - \left|\frac{\tau - \tau'}{\eta}\right|\right) d\tau', \quad (6.3.13)$$

где значение  $b$  определено в (6.3.12), величины  $\chi_0$ ,  $c_0$ ,  $s_0$  вычисляются по формулам (6.3.5), (6.3.7)-(6.3.9) с заменой  $\eta'$ ,  $\varphi'$  на  $\eta_0$ ,  $\varphi_0$  (косинус зенитного угла и азимут Солнца). Заметим, что если интенсивность излучения всегда положительная, то прочие параметры Стокса в общем случае знакопеременные.

Приближение однократного рассеяния (6.3.13) для поляризованного излучения играет более важную роль, чем в скалярной теории. Во-первых, используя (6.3.13), интенсивность излучения более высоких кратностей рассеяния, можно рассчитывать уже по скалярной теории и получать, таким образом, более мощное приближение, чем просто (6.3.13). Во-вторых, как мы убедимся чуть ниже, для поляризованного излучения в общем случае нельзя использовать разложение по азимутальным гармоникам. Следовательно, в численных методах приходится работать со всеми тремя переменными, включая азимут, и в этом случае решение (6.3.13) весьма полезно как явное выражение, от которого можно отталкиваться, строя схемы численных методов.

#### **Формальное решение уравнения переноса поляризованного излучения**

Продолжая идти по пути скалярной теории, можно подставить выражение вектора Стокса через функцию источников (аналог формулы (2.1.13)) в выражение для функции источников (6.3.11). После перехода для получившегося уравнения к операторной форме [1,2] его общий вид сохранится, следовательно, сохраняется и формальное решение в виде ряда Неймана. Аналогичные ряды получаются и при учете отражения от поверхности (см. раздел 2.4).

#### **О разложении на азимутальные гармоники**

На этом наш путь аналогий со скалярной теорией и заканчивается. Далее там мы использовали разложение по азимутальным гармоникам (раздел 2.2), позволившее построить различные весьма эффективные численные методы (главы 2 и 3). К сожалению, для поляризованного излучения разложение по азимутальным гармоникам возможно лишь для совокупных матриц рассеяния частного вида, когда сокращаются знаменатели в формулах для углов вращения (6.3.6)-(6.3.8) (множитель  $\sqrt{1-\chi^2}$ ). Такова, например, матрица молекулярного (релеевского) рассеяния (6.2.4) [13]. Этот частный случай весьма важен для теории, но не для численных методов, где необходим учет аэрозольного рассеяния. Отсутствие возможности разложения на азимутальные гармоники значительно усложняет вычислительные схемы и существенно уменьшает число известных численных методов расчета переноса рассеянного поляризованного излучения.

### **6.4. Модификации численных методов для поляризованного излучения**

#### **Общий обзор**

Начнем с общего анализа численных методов, рассмотренных в главах 2-4, на предмет их применимости для задач с учетом поляризации.

Метод последовательных порядков рассеяния (МПП). Он основан на разложении решения в ряд Неймана, которое, как указано в предыдущем

разделе, возникает и в случае поляризации. Следовательно, МПР может быть модифицирован для учета поляризации, более того, для него, очевидно, этот учет можно выполнить чисто формально, не меняя общую схему алгоритма.

Метод сферических гармоник (МСГ). Он существенно использует разложение по азимутальным гармоникам, следовательно, не может быть модифицирован с учетом поляризации.

Метод дискретных ординат (МДО). В своей классической аналитической форме (раздел 3.2) он также основан на разложении по азимутальным гармоникам и использовании возникающих там соотношений симметрии.

Метод конечных разностей (МКР) – учет поляризации возможен для общего уравнения с переменной “азимут”.

Метод сложения слоев (МСС). В изложении раздела 3.4 использовались сферические гармоники, однако, собственно идея метода основана на добавлении к среде оптически тонкого слоя с использованием приближения однократного рассеяния. Следовательно, его модификация возможна с учетом явных соотношений (6.3.13).

Метод Монте-Карло (ММК). Для него учет поляризации сведется к очевидным модификациям веса фотона при рассеянии и отражении, а также в локальных оценках.

Итак, для дальнейшего рассмотрения выбраны: МПР, МКР, МСС и ММК. МСС заслуживает отдельного раздела, но не потому, что он такой выдающийся, либо сложный, а просто в силу большого объема текста из-за громоздкости его соотношений. Потому в этом разделе мы рассмотрим модификации МПР, МКР и ММК, а в следующем разделе – МСС.

#### **Метод последовательных порядков рассеяния (МПР)**

Его модификация будет заключаться в введении в алгоритмы в качестве переменной азимута и замене скаляров на вектора и матрицы. Проще всего сразу привести схему соответствующего алгоритма (см. все обозначения и детали в разделах 2.3 и 2.5). Заметим только, что в рассматриваемом случае нет разложения по азимутальным гармоникам, поэтому константные множители иные (см. исходные формулы (2.1.11) и (2.4.5)).

1) Выбираем дискретные сетки по оптической толщине  $\tau_i$ ,  $i=1, \dots, N$ , косинусу угла  $\eta_k$ ,  $k=1, \dots, K$  и азимуту  $\varphi_m$ ,  $m=1, \dots, M$  (интегрирование по азимуту можно вести по формуле Гаусса или трапеций, соответствующие веса обозначим  $d^{(\varphi)}$ ).

2) Вводим массив для общего суммирования функции источников  $B(l, \tau_i, \pm\eta_k, \varphi_m)$ , где  $l=1, \dots, 4$  – индекс параметра Стокса, и еще три вспомогательных массива  $B_1(l, \tau_i, \pm\eta_k, \varphi_m)$ ,  $B_2(l, \tau_i, \pm\eta_k, \varphi_m)$ ,  $B^{(r)}(l, \eta_k, \varphi_m)$ . Присваиваем начальные значения

$$B(l, \tau_i, \pm\eta_k, \varphi_m) = B_1(l, \tau_i, \pm\eta_k, \varphi_m) = \frac{\Lambda(\tau_i)S}{4} G_{11}(\tau_i, \pm\eta_k, \varphi_m, \eta_0, \varphi_0) \exp(-\tau_i / \eta_0).$$

3) Вычисляем функцию источников в атмосфере по формуле

$$B_2(l, \tau_i, \pm\eta_k, \varphi_m) = \frac{\Lambda(\tau_i)}{4\pi} \sum_{i'=i}^N \sum_{k'=1}^K \exp\left(-\frac{\tau_i - \tau_{i'}}{\eta_{k'}}\right) d^{(\tau)}(i, i', N) \frac{d^{(\eta)}(1, k', K)}{\eta_{k'}} \times \\ \times \sum_{m'=1}^M d^{(\varphi)}(1, m', M) \sum_{l'=1}^4 G_{ll'}(\tau_i, \pm\eta_k, \varphi_m, \eta_{k'}, \varphi_{m'}) B_1(l', \tau_{i'}, \eta_{k'}, \varphi_{m'}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Lambda(\tau_i)}{4\pi} \sum_{i'=1}^i \sum_{k'=1}^K \exp\left(-\frac{\tau_{i'} - \tau_i}{\eta_{k'}}\right) d^{(\tau)}(1, i', i) \frac{d^{(\eta)}(1, k', K)}{\eta_{k'}} \times \\
& \times \sum_{m=1}^M d^{(\varphi)}(1, m', M) \sum_{l'=1}^4 G_{ll'}(\tau_i, \pm\eta_k, \varphi_m, -\eta_{k'}, \varphi_{m'}) B_1(l', \tau_{i'}, -\eta_{k'}, \varphi_{m'}). \quad (6.4.1)
\end{aligned}$$

Присваиваем

$$\begin{aligned}
B(l, \tau_i, \pm\eta_k, \varphi_m) & := B(l, \tau_i, \pm\eta_k, \varphi_m) + B_2(l, \tau_i, \pm\eta_k, \varphi_m); \\
B_1(l, \tau_i, \pm\eta_k, \varphi_m) & = B_2(l, \tau_i, \pm\eta_k, \varphi_m).
\end{aligned}$$

4) Учитываем отражение от поверхности (наиболее удобна схема с преобладанием отражения). Вычисляем аналогично (2.5.4)

$$\begin{aligned}
B^{(r)}(l, -\eta_k, \varphi_m) & = \sum_{k'=1}^K \frac{|\eta_{k'}|}{\eta_{k'}} d^{(\eta)}(1, k', K) \sum_{m'=1}^M \sum_{l'=1}^4 R_{ll'}(-\eta_k, \eta_{k'}, \varphi_m - \varphi_{m'}) \times \\
& \times d^{(\varphi)}(1, m', M) \sum_{i'}^N B_2(l', \tau_i, +\eta_{k'}, \varphi_{m'}) \exp\left(-\frac{\tau_1 - \tau_{i'}}{(+\eta_{k'})}\right) d^{(\tau)}(1, i', N), \quad (6.4.2)
\end{aligned}$$

где  $R_{ll'}(-\eta_k, \eta_{k'}, \varphi_m - \varphi_{m'})$  – матрица отражения уже с учетом вращений (раздел 6.2). Для идеального изотропного отражения согласно (6.2.5) и (2.4.8) имеем формальную замену  $\frac{1}{\eta_{k'}} R_{ll'}(-\eta_k, \eta_{k'}, \varphi_m - \varphi_{m'}) = \frac{1}{\pi} A \delta_{ll'}$ , где  $\delta_{ll'} = 1$ , если  $l = l'$  и

$\delta_{ll'} = 0$ , если  $l \neq l'$ . Для первой итерации и рассеяния, и отражения добавляем отражение прямого излучения

$$B^{(r)}(l, -\eta_k, \varphi_m) := B^{(r)}(l, -\eta_k, \varphi_m) + \pi S \eta_k R_{l1}(-\eta_k, \eta_0, \varphi_m - \varphi_0) \exp(-\tau_1 / \eta_0) \quad (6.4.3)$$

с той же формальной заменой для изотропного отражения. Суммируем  $B(l, \tau_1, -\eta_k, \varphi_m) := B(l, \tau_1, -\eta_k, \varphi_m) + B^{(r)}(l, -\eta_k, \varphi_m)$  и вычисляем вклад отраженного излучения в рассеянное излучение по (2.5.7)

$$\begin{aligned}
B_2(l, \tau_i, \pm\eta_k, \varphi_m) & = \sum_{k'=1}^k \frac{\Lambda(\tau_i)}{2|\eta_{k'}|} \exp\left(-\left|\frac{\tau_1 - \tau_i}{\eta_{k'}}\right|\right) d^{(\eta)}(1, k', K) \times \\
& \times \sum_{m=1}^M d^{(\varphi)}(1, m, M) \sum_{l'=1}^4 G_{ll'}(\tau_i, \pm\eta_k, \varphi_m, -\eta_{k'}, \varphi_{m'}) B^{(r)}(l, -\eta_{k'}, \varphi_{m'}), \quad (6.4.4)
\end{aligned}$$

после чего вновь суммируем  $B(l, \tau_i, \pm\eta_k, \varphi_m) := B(l, \tau_i, \pm\eta_k, \varphi_m) + B_2(l, \tau_i, \pm\eta_k, \varphi_m)$ . Вычисления по (6.4.4) составляют цикл итераций, о критерии его прекращения сказано в разделе 2.5.

5) После завершения цикла итераций по отражению продолжается общий цикл итераций по рассеянию (с отражением) – это вычисления по (6.4.1) (значение  $B_1(l, \tau_i, \pm\eta_k, \varphi_m)$  сохранено!). Критерии его остановки – см. раздел 2.3. После завершения всех итераций искомый вектор Стокса находится по (6.3.12).

### Особенности МПР для ИК и МКВ излучения

Как уже отмечалось в главе 2, МПР в общем случае является неэффективным для солнечного излучения из-за медленной сходимости вследствие слабого поглощения. Однако он может оказаться чрезвычайно эффективным в ИК и МКВ диапазонах, где поглощение излучения всегда достаточно существенно.

Модификация приведенного выше алгоритма для теплового излучения элементарна: надо в качестве начальных значений присвоить  $(1 - \Lambda(\tau_i))(B_e(\lambda, T(\tau_i)), 0, 0, 0)^+$  для всего диапазона индексов, а на поверхности ( $i = 1, \tau_i = \tau_1$ ) добавить вектор ее собственного излучения (раздел 6.2)  $\eta_k \mathbf{L}^{(i)}$ . Вычислять и суммировать прямое излучение в четвертой операции алгоритма не надо.

Отметим важный момент. Если (стандартно) собственное излучение и атмосферы, и поверхности изотропно, то изменение поляризации и даже ее возникновение, если собственное излучение поверхности не поляризовано, происходит только при отражении от поверхности. Если это отражение не имеет азимутальной зависимости (а таковы изотропное и идеальное зеркальное отражение), то из физических соображений, в силу симметрии вращения – независимости условий задачи относительно поворотов вокруг оси “зенит-надир”, следует, что вектор Стокса не будет зависеть от азимута. Тогда необходимо убрать в приведенном выше алгоритме переменную “азимут”, что многократно ускорит его работу, сведя фактически к высокоскоростной схеме второй главы.

Для совокупной матрицы рассеяния при этом возникнет усреднение по азимуту:

$$\mathbf{G}(\tau, \eta, \eta') = \int_0^{2\pi} \mathbf{G}(\tau, \eta, \varphi, \eta', \varphi') d(\varphi - \varphi'), \quad (6.4.5)$$

где мы, ради краткости, не стали вводить для усредненной матрицы новое обозначение. Напомним, в рассматриваемом варианте матрица отражения азимутальной зависимости не имеет. В общем случае интеграл (6.4.5) следует вычислять численно. Для релеевского рассеяния (6.2.4) учитывая явный вид совокупной матрицы рассеяния (6.3.10) и тригонометрических соотношений (6.3.5)-(6.3.9), интегрирование в (6.4.5) может быть выполнено аналитически. В результате несложных, но довольно громоздких алгебраических преобразований, схема которых приведена в [13], получаем

$$\mathbf{G}(\eta, \eta') = \frac{3}{4} \pi \begin{pmatrix} 3 + 3\eta^2(\eta')^2 - \eta^2 - (\eta')^2 & (1 - 3\eta^2)(1 - (\eta')^2) & 0 & 0 \\ (1 - 3(\eta')^2)(1 - \eta^2) & 3(1 - \eta^2)(1 - (\eta')^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\eta\eta' \end{pmatrix}. \quad (6.4.6)$$

Напомним, что в ИК и МКВ диапазонах приближение релеевского рассеяния применимо к весьма крупным аэрозольным частицам [1,2]. В частности, в МКВ диапазоне таковыми могут быть даже частицы облаков и осадков. Отметим возникшую в (6.4.6) симметрию  $\mathbf{G}(\eta, \eta') = \mathbf{G}(\eta', \eta)$ , которая в общем случае поляризованного излучения отсутствует (сравните с соотношениями (2.2.16)).

#### Метод конечных разностей (МКР)

Здесь для поляризованного излучения формально-математическая ситуация даже проще, чем для неполяризованного, поскольку из-за отсутствия в общем случае симметрии нет смысла разбивать искомую интенсивность на две части. Мы получаем МКР “в чистом виде”, как прямое математическое решение уравнения переноса (6.3.2) в виде конечно-разностной схемы. Будем, как и в МПР, искать весь совокупный вектор Стокса  $L(l, \tau_i, \eta_k, \varphi_m)$  с теми же диапазонами индексов и весами интегрирования. Поскольку в МКР в итоге

необходимо перейти к матричной записи уравнения переноса, вся задача сводится к “упаковке” четырехмерной структуры  $L(l, \tau_i, \eta_k, \varphi_m)$  в одномерный вектор.

Пусть, для определенности, самым быстро меняющимся индексом является  $l$ , далее –  $m$ , потом –  $k$  и, наконец –  $i$ . Вводим линейный вектор  $\mathbf{u}$ , в который упаковываем четырехмерную структуру согласно указанному порядку следования индексов по известной в программировании формуле развертки многомерного массива:

$$u_j \equiv L(l, \tau_i, \eta_k, \varphi_m), \quad j = 8(i-1)KM + 4(q(\pm k) - 1)M + 4(m-1) + l. \quad (6.4.7)$$

Заметим, что, во-первых, из-за отсутствия симметрии, диапазон изменения индекса зенитного угла рассеяния приходится выбирать полным (то есть  $2K$ ), поэтому договоримся, что

$$q(k) = k \text{ при } k > 0; \quad q(k) = K + |k| \text{ при } k < 0. \quad (6.4.8)$$

Во-вторых, диапазон изменения индекса  $j$  и, следовательно, размерность системы подлежащих решению линейных уравнений есть  $8NKM$ . В-третьих, проще всего понять МКР с поляризацией обращаясь даже не к теории, а к уже имеющимся формулам МПР (6.4.1)-(6.4.4), а также к материалам раздела 3.3.

С учетом (6.4.7)-(6.4.8) мы для удобства можем опять оперировать с четырьмя индексами и переобозначить неизвестный вектор теперь уже как  $u(l, i, q(\pm k), m)$ , а вектор свободных членов как  $\mathbf{w} = w(l, i, q(\pm k), m)$  и матрицу системы как  $\mathbf{V} = V(l, l', i, i', q(\pm k), q(\pm k'), m, m')$ , где переменные без штрихов определяют по (6.4.7) номер строки матрицы ( $j$ ), а переменные со штрихами – номер столбца ( $j'$ ).

Вектор неизвестного  $\mathbf{u}$  сформирован. Осталось лишь расписать матрицу системы линейных уравнений и ее свободный член. Проще начать с вектора свободного члена системы. Договоримся, как и в разделах 3.2 и 3.3, рассматривать общий случай присутствия и солнечного, и теплового излучений (эта возможность – важное преимущество МКР). При наличии только одного из них соответствующее исключение лишнего компонента выполняется достаточно просто. Обнуляем  $w(l, i, q(\pm k), m)$  и присваиваем для солнечного излучения

$$w(l, i, q(+k), m) := w(l, i, q(+k), m) + \frac{\Lambda(\tau_i)S}{4} G_{11}(\tau_i, \eta_k, \varphi_m, \eta_0, \varphi_0) \exp(-\tau_i / \eta_0). \quad \text{Для}$$

теплового –  $w(l=1, i, q(\pm k), m) := w(l=1, i, q(\pm k), m) + (1 - \Lambda(\tau_i)) B_e(\lambda, T(\tau_i))$ , еще для теплового добавляем собственное излучение поверхности  $w(l, i=1, q(-k), m) := w(l, i=1, q(-k), m) + L^{(i)}(l, k, m)$ .

Матрица системы уравнений  $\mathbf{V}$ . Ее проще всего соорудить последовательно, обнулив в начале. Начнем (см. раздел 3.3) с оператора дифференцирования. Присваиваем блочно-диагональные матрицы ( $l'=l, k'=k, m'=m$ )  $V(l, l, i, i', q(\pm k), q(\pm k), m, m) := V(l, l, i, i', q(\pm k), q(\pm k), m, m) + \eta_k D_{ii'}$ , где  $D_{ii'}$  – компоненты матрицы численного дифференцирования (3.3.2) (с заменой переменной  $x$  на  $\tau$ ). Присвоим глобальную диагональ ( $l'=l, i'=i, k'=k, m'=m$ )  $V(l, l, i, i, q(\pm k), q(\pm k), m, m) := V(l, l, i, i, q(\pm k), q(\pm k), m, m) + 1$ . Далее – получаем вид оператора рассеяния излучения (см. (3.3.3) и (6.4.1)), здесь  $i'=i$ :

$$V(l, l', i, i, q(\pm k), q(\pm k'), m, m') := V(l, l', i, i, q(\pm k), q(+k'), m, m') - \frac{\Lambda(\tau_i)}{4\pi} G_{11'}(\tau_i, \pm \eta_k, \varphi_m, \pm \eta_{k'}, \varphi_{m'}) d^{(\eta)}(1, k', K) d^{(\varphi)}(1, m', M). \quad (6.4.9)$$

Оператор отражения от поверхности при  $i = i' = 1$  имеет вид

$$V(l, l', 1, 1, q(-k), q(+k'), m, m') := V(l, l', 1, 1, q(-k), q(+k'), m, m') + R_{l'}(-\eta_k, \eta_{k'}, \varphi_m - \varphi_{m'}) d^{(\eta)}(1, k', K) d^{(\varphi)}(1, m', M), \quad (6.4.10)$$

здесь же удобно добавить и прямое солнечное излучение в свободный член ( $l = 1$ )

$$w(1, 1, q(-k), m) := w(1, 1, q(-k), m) + \pi S R_{l'}(-\eta_k, \eta_0, \varphi_m - \varphi_0) \exp(-\tau_1 / \eta_0). \quad (6.4.11)$$

Для изотропного отражения с альбедо  $A$  производится формальная замена

$$R_{l'}(-\eta_k, \eta_{k'}, \varphi_m - \varphi_{m'}) = \frac{\eta_{k'}}{\pi} A \delta_{l'l'}, \text{ где } \delta_{l'l'} = 1, \text{ если } l = l' \text{ и } \delta_{l'l'} = 0, \text{ если } l \neq l'.$$

Итак, имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{V}\mathbf{u} = \mathbf{w} \quad (6.4.12)$$

с решением (см. Приложение 8)

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{w}. \quad (6.4.13)$$

Для получения искомого вектора Стокса осталось перейти обратно от упакованного вектора  $u_j$  к многомерной структуре, что с учетом (6.4.7)-(6.4.8)

снова делается по известному из программирования алгоритму:

$$\begin{aligned} L(l, \tau_i, \eta_k, \varphi_m) &\equiv u_j, \quad j = 1, \dots, 8NKM; \\ i &= 1 + \text{int}(j / 8KM), \\ q &= 1 + \text{int}((j - 8(i - 1)KM) / 4M), \quad k = q, \text{ если } q \leq K, \quad k = K - q, \text{ если } q > K, \\ m &= 1 + \text{int}((j - 8(i - 1)KM - 4(q - 1)M) / 4), \\ l &= 1 + j - 8(i - 1)KM - 4(q - 1)M - 4m, \end{aligned} \quad (6.4.14)$$

где  $\text{int}()$  – целая часть числа.

Отметим, что размерность системы уравнений  $8NKM$  довольно велика (порядка десятков тысяч), но не критична для современных компьютеров, особенно если учесть, что матрица системы содержит очень много нулей (см. замечание об этом в разделе 3.3). Зато приведенная здесь схема МКР не использует разложения по азимутальным гармоникам со всеми его вычислительными проблемами (см. раздел 2.2).

### Метод Монте-Карло (ММК)

Для ММК учет поляризации возможен лишь при расчетах интенсивности излучения (см. раздел 4.4), но не при расчетах потоков (см. замечание о приближении неполяризованного излучения в разделе 6.3) в схемах весового моделирования с локальными оценками. Учет поляризации, очевидно, сводится к замене скалярного фотона вектором, то есть вес фотона теперь будет вектором из четырех компонент, каждая из которых будет соответствовать компоненте искомого вектора Стокса. Соответственно, и счетчики интенсивности станут векторными. Моделирование свободного пробега, углов рассеяния и отражения от поверхности указанная модификация никак не затронет, т.к. они основаны на соотношениях для энергии излучения, которая выражается исключительно через интенсивность. Учет поляризации в ММК осуществиться за счет ПЛО (4.4.1) или ДЛО (4.4.7) для рассеяния, в которых индикатрисы отражения следует заменить совокупными матрицами отражения (с учетом направлений  $(\eta, \varphi)$ ,  $(\eta^*, \varphi^*)$  и  $(\eta', \varphi')$ ), и ПЛО (4.4.2) и (4.4.4) для отражения, в которых помимо замены индикатрисы надо заменить коэффициент отражения на соответствующую матрицу (с учетом матриц вращения – см. раздел 6.3).

Особый случай – моделирование по обратным траекториям. При расчетах интенсивности была возможна простая взаимная замена источника и приемника. Это следовало из симметрии индикатрис рассеяния и матриц отражения при замене направлений на обратные. Однако для поляризованного излучения данная симметрия в общем случае отсутствует. В этом легко убедиться, обратившись, например, к явным соотношениям (6.3.13) (коэффициенты  $c_0$  и  $s_0$  в них не обладают симметрией при взаимной замене  $(\eta, \varphi)$  и  $(\eta_0, \varphi_0)$  – см. соотношения (6.3.7)-(6.3.9)). Однако можно рассуждать достаточно просто, исходя из общего вида совокупной матрицы рассеяния (6.3.4). Действительно для прямых траекторий мы имели сначала поворот на угол  $\beta'$ , потом – на угол  $\beta$ . Для обратных траекторий, очевидно, следует поступить наоборот, сначала повернув на  $\beta$ , потом – на  $\beta'$ . Итак, для моделирования по обратным траекториям в ММК совокупная матрица рассеяния имеет вид

$$\mathbf{G}(\tau, \eta, \varphi, \eta', \varphi') = \mathbf{M}(\beta') \mathbf{X}(\tau, \chi) \mathbf{M}(\beta). \quad (6.4.14)$$

Для получения явного вида (6.4.14) достаточно просто в (6.3.10) убрать штрихи у штрихованных элементов и поставить их у не штрихованных.

Таким образом, модификация алгоритмов ММК для учета поляризации, в сущности, элементарна. Мы не будем переписывать соответствующие формулы главы 4, предлагая проделать это читателю в качестве упражнения. Заметим, что именно ММК предоставляет совершенно простые средства расчета вектора Стокса излучения без катастрофического увеличения времени счета, как это имеет место в соответствующих модификациях МПР, МКР и МСС. Это позволяет многим авторам утверждать о преимуществе ММК именно в задачах расчета поляризованного излучения.

## 6.5. Метод сложения слоев для поляризованного излучения

### Формальная схема метода сложения слоев (МСС)

В разделе 3.4 мы достаточно подробно рассмотрели МСС с учетом его наглядного физического смысла. Это дает нам право теперь взглянуть на МСС с противоположной стороны – как на формально-математический метод.

Пусть имеется некоторый слой атмосферы толщиной  $\tau$ . Суть МСС – определение интенсивностей или векторов Стокса выходящего из слоя излучения по известному входящему. Запишем это формально как операцию преобразования

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(0, -\eta, \varphi) &= \mathbf{S}(\tau, -\eta, \varphi, \eta', \varphi') \mathbf{L}_0(\eta', \varphi'), \\ \mathbf{L}(\tau, \eta, \varphi) &= \mathbf{T}(\tau, \eta, \varphi, \eta', \varphi') \mathbf{L}_0(\eta', \varphi'), \\ \tilde{\mathbf{L}}(\tau, \eta, \varphi) &= \tilde{\mathbf{S}}(\tau, \eta, \varphi, -\eta', \varphi') \tilde{\mathbf{L}}_0(-\eta', \varphi'), \\ \tilde{\mathbf{L}}(0, -\eta, \varphi) &= \tilde{\mathbf{T}}(\tau, -\eta, \varphi, -\eta', \varphi') \tilde{\mathbf{L}}_0(-\eta', \varphi'), \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

где  $\mathbf{L}_0(\eta', \varphi')$  – вектор Стокса падающего на слой излучения при освещении сверху с направления  $(\eta', \varphi')$ , а  $\tilde{\mathbf{L}}_0(-\eta', \varphi')$  – снизу с направления  $(-\eta', \varphi')$ ;  $\mathbf{L}(\tau, \eta, \varphi)$ ,  $\mathbf{L}(0, -\eta, \varphi)$ ,  $\tilde{\mathbf{L}}(\tau, \eta, \varphi)$ ,  $\tilde{\mathbf{L}}(0, -\eta, \varphi)$  – векторы Стокса выходящего из слоя излучения в направлениях  $(-\eta, \varphi)$  через его верхнюю границу и в направлениях  $(\eta, \varphi)$  через его нижнюю границу при освещении сверху и снизу;



$\mathbf{S}(\tau, -\eta, \varphi, \eta', \varphi')$  и  $\tilde{\mathbf{S}}(\tau, \eta, \varphi, -\eta', \varphi')$  – матрицы ( $4 \times 4$ ) отражения слоя при освещении сверху и снизу,  $\mathbf{T}(\tau, \eta, \varphi, \eta', \varphi')$  и  $\tilde{\mathbf{T}}(\tau, -\eta, \varphi, -\eta', \varphi')$  – матрицы пропускания слоя при освещении сверху и снизу. По традиции МСС, все косинусы зенитных углов ( $\eta$  и  $\eta'$ ) – положительные величины.

Задача МСС, согласно (6.5.1), сводится к нахождению матриц отражения и пропускания всей атмосферы ( $\tau = \tau_0$ ) и применению их к прямому неполяризованному солнечному излучению. Для этого достаточно (см. раздел 3.4) решить две задачи: (1) найти явный вид указанных матриц для оптически однородного тонкого слоя  $\Delta\tau$  в приближении однократного рассеяния; (2) построить алгоритм пересчета указанных матриц при добавлении оптически тонкого слоя к слою произвольной толщины  $\tau$ .

#### Задача (1) – приближение однократного рассеяния

Решение несложным образом получается по формулам (6.3.11)-(6.3.12) формальной модификацией соотношений (3.4.3) (все интегралы там уже сосчитаны!), причем как и в разделе 3.4 используем строчные буквы.

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\Delta\tau, -\eta, \varphi, \eta', \varphi') &= \frac{\Lambda}{4\pi} \eta' \mathbf{G}(-\eta, \varphi, \eta', \varphi') \frac{1 - \exp(-\Delta\tau(1/\eta + 1/\eta'))}{\eta + \eta'} \\ \tilde{\mathbf{s}}(\Delta\tau, \eta, \varphi, -\eta', \varphi') &= \frac{\Lambda}{4\pi} \eta' \mathbf{G}(\eta, \varphi, -\eta', \varphi') \frac{1 - \exp(-\Delta\tau(1/\eta + 1/\eta'))}{\eta + \eta'}; \\ \mathbf{t}(\Delta\tau, \eta, \varphi, \eta', \varphi') &= \frac{\Lambda}{4\pi} \eta' \mathbf{G}(\eta, \varphi, \eta', \varphi') \frac{\exp(-\Delta\tau/\eta) - \exp(-\Delta\tau/\eta')}{\eta - \eta'}, \\ &\text{если } \eta \neq \eta', \\ \mathbf{t}(\Delta\tau, \eta, \varphi, \eta', \varphi') &= \frac{\Lambda}{4\pi} \eta' \Delta\tau \mathbf{G}(\eta, \varphi, \eta', \varphi') \exp(-\Delta\tau/\eta'), \text{ если } \eta = \eta'; \\ \tilde{\mathbf{t}}(\Delta\tau, -\eta, \varphi, -\eta', \varphi') &= \frac{\Lambda}{4\pi} \eta' \mathbf{G}(-\eta, \varphi, -\eta', \varphi') \frac{\exp(-\Delta\tau/\eta) - \exp(-\Delta\tau/\eta')}{\eta - \eta'}, \\ &\text{если } \eta \neq \eta', \\ \tilde{\mathbf{t}}(\Delta\tau, -\eta, \varphi, -\eta', \varphi') &= \frac{\Lambda}{4\pi} \eta' \Delta\tau \mathbf{G}(-\eta, \varphi, -\eta', \varphi') \exp(-\Delta\tau/\eta'), \text{ если } \eta = \eta'; \end{aligned} \tag{6.5.2}$$

#### Задача (2) – сложение слоев

Прибавляем к слою оптической толщины  $\tau$ , для которого матрицы отражения и пропускания (6.5.1) известны, снизу тонкий оптический слой толщиной  $\Delta\tau$ , для которого указанные матрицы определяются соотношениями (6.5.2). Исходное освещение есть падающее на верхний слой  $\mathbf{L}_0(\eta', \varphi')$  и на нижний слой  $\tilde{\mathbf{L}}_0(-\eta', \varphi')$ . Дальше все очень просто, достаточно формально модифицировать восемь соотношений МСС раздела 3.4, перейдя от интенсивностей к матрицам отражения и пропускания на основе (6.5.1), фактически повторив приведенные при выводе (3.4.6)-(3.4.13) физические рассуждения.

Вектор Стокса излучения, выходящего из нижнего слоя в верхний при освещении сверху, является аналогом (3.4.6). Нижний слой освещен проходящим сквозь верхний слой прямым излучением, и плюс еще диффузным от верхнего же слоя:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{21}(\tau, -\eta, \varphi, \eta', \varphi') &= \mathbf{s}(\Delta\tau, -\eta, \varphi, \eta', \varphi') \mathbf{L}_0(\eta', \varphi') \exp(-\tau/\eta') + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\varphi'' \int_0^1 \mathbf{s}(\Delta\tau, -\eta, \varphi, \eta'', \varphi'') (\mathbf{T}(\tau, \eta'', \varphi'', \eta', \varphi') \mathbf{L}_0(\eta', \varphi')) d\eta''. \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

Вынося  $\mathbf{L}_0(\eta', \varphi')$  за скобки, получаем, согласно (6.5.1), “промежуточную” матрицу переноса:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{21}(\tau, -\eta, \varphi, \eta', \varphi') &= \exp(-\tau/\eta') \mathbf{s}(\Delta\tau, -\eta, \varphi, \eta', \varphi') + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\varphi'' \int_0^1 \mathbf{s}(\Delta\tau, -\eta, \varphi, \eta'', \varphi'') \mathbf{T}(\tau, \eta'', \varphi'', \eta', \varphi') d\eta''. \end{aligned} \quad (6.5.4)$$

Вектор Стокса излучения, выходящего из нижнего слоя в верхний при освещении снизу, является аналогом (3.4.7). Нижний слой освещен снизу прямым излучением, и плюс сверху диффузным от первого слоя с учетом ослабления:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}_{21}(\tau, -\eta, \varphi, -\eta', \varphi') &= \tilde{\mathbf{t}}(\Delta\tau, -\eta, \varphi, -\eta', \varphi') \tilde{\mathbf{L}}_0(-\eta', \varphi') + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\varphi'' \int_0^1 \mathbf{s}(\Delta\tau, -\eta, \varphi, \eta'', \varphi'') (\tilde{\mathbf{S}}(\tau, \eta'', \varphi'', -\eta', \varphi') \tilde{\mathbf{L}}_0(-\eta', \varphi') \exp(-\Delta\tau/\eta')) d\eta''. \end{aligned} \quad (6.5.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_{21}(\tau, -\eta, \varphi, -\eta', \varphi') &= \tilde{\mathbf{t}}(\Delta\tau, -\eta, \varphi, -\eta', \varphi') + \\ &+ \exp(-\Delta\tau/\eta') \int_0^{2\pi} d\varphi'' \int_0^1 \mathbf{s}(\Delta\tau, -\eta, \varphi, \eta'', \varphi'') \tilde{\mathbf{S}}(\tau, \eta'', \varphi'', -\eta', \varphi') d\eta''. \end{aligned} \quad (6.5.6)$$

Вектор Стокса излучения, выходящего из верхнего слоя в нижний при освещении сверху, является аналогом (3.4.8). Верхний слой освещен прямым излучением сверху, и плюс диффузным с (6.5.3) снизу:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{12}(\tau, \eta, \varphi, \eta', \varphi') &= \mathbf{T}(\tau, \eta, \varphi, \eta', \varphi') \tilde{\mathbf{L}}_0(-\eta', \varphi') + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\varphi'' \int_0^1 \tilde{\mathbf{S}}(\tau, \eta, \varphi, -\eta'', \varphi'') \mathbf{L}_{21}(\tau, -\eta'', \varphi'', \eta', \varphi') d\eta'', \end{aligned} \quad (6.5.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{12}(\tau, \eta, \varphi, \eta', \varphi') &= \mathbf{T}(\tau, \eta, \varphi, \eta', \varphi') + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\varphi'' \int_0^1 \tilde{\mathbf{S}}(\tau, \eta, \varphi, -\eta'', \varphi'') \mathbf{S}_{21}(\tau, -\eta'', \varphi'', \eta', \varphi') d\eta''. \end{aligned} \quad (6.5.8)$$

Вектор Стокса излучения, выходящего из верхнего слоя в нижний при освещении снизу, является аналогом (3.4.9). Верхний слой освещен ослабленным прямым излучением снизу, и плюс диффузным с (6.5.5) снизу:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}_{12}(\tau, \eta, \varphi, -\eta', \varphi') &= \tilde{\mathbf{S}}(\tau, \eta, \varphi, -\eta', \varphi') \tilde{\mathbf{L}}_0(-\eta', \varphi') \exp(-\Delta\tau/\eta') + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\varphi'' \int_0^1 \tilde{\mathbf{S}}(\tau, \eta, \varphi, -\eta'', \varphi'') \tilde{\mathbf{L}}_{21}(\tau, -\eta'', \varphi'', -\eta', \varphi') d\eta'', \end{aligned} \quad (6.5.9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}_{12}(\tau, \eta, \varphi, -\eta', \varphi') &= \exp(-\Delta\tau/\eta') \tilde{\mathbf{S}}(\tau, \eta, \varphi, -\eta', \varphi') + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\varphi'' \int_0^1 \tilde{\mathbf{S}}(\tau, \eta, \varphi, -\eta'', \varphi'') \tilde{\mathbf{S}}_{21}(\tau, -\eta'', \varphi'', -\eta', \varphi') d\eta'', \end{aligned} \quad (6.5.10)$$

### Задача (2) – продолжение – объединение слоев

Находим векторы Стокса и соответствующие матрицы отражения и пропускания для объединенного слоя.

Вектор Стокса излучения, выходящего через нижнюю границу при освещении сверху, является аналогом (3.4.10). Сумма излучений от каждого слоя с учетом ослабления, и плюс излучение второго слоя при освещении с (6.5.7) сверху:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\tau + \Delta\tau, \eta, \varphi, \eta', \varphi') &= \mathbf{T}(\tau, \eta, \varphi, \eta', \varphi') \mathbf{L}_0(\eta', \varphi') \exp(-\Delta\tau / \eta') + \\ &+ \mathbf{t}(\Delta\tau, \eta, \varphi, \eta', \varphi') \mathbf{L}_0(\eta', \varphi') \exp(-\tau / \eta') + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\varphi'' \int_0^1 \mathbf{t}(\tau, \eta, \varphi, \eta'', \varphi'') \mathbf{L}_{12}(\tau, \eta'', \varphi'', \eta', \varphi') d\eta'', \end{aligned} \quad (6.5.11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\tau + \Delta\tau, \eta, \varphi, \eta', \varphi') &= \exp(-\Delta\tau / \eta') \mathbf{T}(\tau, \eta, \varphi, \eta', \varphi') + \\ &+ \exp(-\tau / \eta') \mathbf{t}(\Delta\tau, \eta, \varphi, \eta', \varphi') + \int_0^{2\pi} d\varphi'' \int_0^1 \mathbf{t}(\tau, \eta, \varphi, \eta'', \varphi'') \mathbf{S}_{12}(\tau, \eta'', \varphi'', \eta', \varphi') d\eta''. \end{aligned} \quad (6.5.12)$$

Вектор Стокса излучения, выходящего через верхнюю границу при освещении сверху, является аналогом (3.4.11). Аналогичная сумма излучений отдельных слоев, и плюс излучение первого слоя при освещении с (6.5.3) снизу:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(0, -\eta, \varphi, \eta', \varphi') &= \mathbf{S}(0, -\eta, \varphi, \eta', \varphi') \mathbf{L}_0(\eta', \varphi') + \\ &+ \mathbf{s}(\Delta\tau, -\eta, \varphi, \eta', \varphi') \mathbf{L}_0(\eta', \varphi') \exp(-\tau / \eta') + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\varphi'' \int_0^1 \tilde{\mathbf{T}}(\tau, -\eta, \varphi, -\eta'', \varphi'') \mathbf{L}_{21}(\tau, -\eta'', \varphi'', \eta', \varphi') d\eta'', \end{aligned} \quad (6.5.13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\tau + \Delta\tau = 0, -\eta, \varphi, \eta', \varphi') &= \mathbf{S}(0, -\eta, \varphi, \eta', \varphi') + \exp(-\tau / \eta') \mathbf{s}(\Delta\tau, -\eta, \varphi, \eta', \varphi') + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\varphi'' \int_0^1 \tilde{\mathbf{T}}(\tau, -\eta, \varphi, -\eta'', \varphi'') \mathbf{S}_{21}(\tau, -\eta'', \varphi'', \eta', \varphi') d\eta'', \end{aligned} \quad (6.5.14)$$

где в левой части равенства (6.5.14) стоит матрица отражения объединенного слоя.

Вектор Стокса излучения, выходящего через нижнюю границу при освещении снизу, является аналогом (3.4.12). Опять сумма излучений отдельных слоев, и плюс излучение нижнего слоя при освещении с (6.5.9) сверху:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}(\tau + \Delta\tau, \eta, \varphi, -\eta', \varphi') &= \tilde{\mathbf{S}}(\tau, \eta, \varphi, -\eta', \varphi') \tilde{\mathbf{L}}_0(-\eta', \varphi') \exp(-\Delta\tau / \eta') + \\ &+ \tilde{\mathbf{s}}(\Delta\tau, \eta, \varphi, -\eta', \varphi') \tilde{\mathbf{L}}_0(-\eta', \varphi') + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\varphi'' \int_0^1 \mathbf{t}(\Delta\tau, \eta, \varphi, \eta'', \varphi'') \tilde{\mathbf{L}}_{12}(\tau, \eta'', \varphi'', -\eta', \varphi') d\eta'', \end{aligned} \quad (6.5.15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}(\tau + \Delta\tau, \eta, \varphi, -\eta', \varphi') &= \exp(-\Delta\tau / \eta') \tilde{\mathbf{S}}(\tau, \eta, \varphi, -\eta', \varphi') + \tilde{\mathbf{s}}(\Delta\tau, \eta, \varphi, -\eta', \varphi') + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\varphi'' \int_0^1 \mathbf{t}(\Delta\tau, \eta, \varphi, \eta'', \varphi'') \tilde{\mathbf{S}}_{12}(\tau, \eta'', \varphi'', -\eta', \varphi') d\eta''. \end{aligned} \quad (6.5.16)$$

Вектор Стокса излучения, выходящего через верхнюю границу при освещении снизу, является аналогом (3.4.13). Вновь сумма излучений отдельных слоев, и плюс излучение верхнего слоя при освещении с (6.5.5) снизу:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}(0, -\eta, \varphi, -\eta', \varphi') &= \tilde{\mathbf{T}}(\tau, -\eta, \varphi, -\eta', \varphi') \tilde{\mathbf{L}}_0(-\eta', \varphi') \exp(-\Delta\tau / \eta') + \\ &+ \tilde{\mathbf{t}}(\Delta\tau, -\eta, \varphi, -\eta', \varphi') \tilde{\mathbf{L}}_0(-\eta', \varphi') \exp(-\tau / \eta') + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\varphi'' \int_0^1 \tilde{\mathbf{T}}(\Delta\tau, -\eta, \varphi, -\eta'', \varphi'') \tilde{\mathbf{L}}_{21}(\tau, -\eta'', \varphi'', -\eta', \varphi') d\eta'', \quad (6.5.17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}}(\tau + \Delta\tau = 0, -\eta, \varphi, -\eta', \varphi') &= \tilde{\mathbf{T}}(\tau, -\eta, \varphi, -\eta', \varphi') \exp(-\Delta\tau/\eta') + \\ &+ \tilde{\mathbf{t}}(\Delta\tau, -\eta, \varphi, -\eta', \varphi') \exp(-\tau/\eta') + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\varphi'' \int_0^1 \tilde{\mathbf{T}}(\Delta\tau, -\eta, \varphi, -\eta'', \varphi'') \tilde{\mathbf{S}}_{21}(\tau, -\eta'', \varphi'', -\eta', \varphi') d\eta'', \end{aligned} \quad (6.5.18)$$

где в (6.5.18) слева от знака равенства стоит функция пропускания объединенного слоя.

### Решение получено!

Итак, соотношения (6.5.2), (6.5.4), (6.5.6), (6.5.8), (6.5.10), (6.5.12), (6.5.14), (6.5.16) и (6.5.18) дают решение задачи модификации МСС для поляризованного излучения. Конкретная схема алгоритма МСС для сложения слоев по всей атмосфере очевидна и получается простой модификацией схемы раздела 3.4, из которой достаточно исключить цикл по азимутальным гармоникам. Предоставляем написать ее читателю в качестве упражнения.

### Учет отражения от поверхности в МСС

Имея после работы МСС матрицы (6.5.1) для всей атмосферы (с  $\tau = \tau_0$ ), далее несложно учесть отражение излучения от поверхности. Действительно, для исходного вектора Стокса солнечного излучения  $\mathbf{L}_0(\eta' = \eta_0, \varphi' = \varphi_0) = \pi \mathbf{S}(1, 0, 0, 0)^+$  получаем излучение на границах атмосферы

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(0, -\eta, \varphi) &= \mathbf{S}(\tau_0, -\eta, \varphi, \eta_0, \varphi_0) \mathbf{L}_0(\eta_0, \varphi_0) \\ \mathbf{L}(\tau_0, \eta, \varphi) &= \mathbf{T}(\tau_0, \eta, \varphi, \eta_0, \varphi_0) \mathbf{L}_0(\eta_0, \varphi_0). \end{aligned} \quad (6.5.19)$$

Отраженное излучение на нижней границе определяется через матрицу отражения  $\mathbf{R}(\eta, \eta', \varphi - \varphi')$  соотношением (6.2.7), следовательно

$$\mathbf{L}^{(r)}(\tau_0, -\eta, \varphi) = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \mathbf{R}(\eta, \eta', \varphi - \varphi') \mathbf{L}(\tau_0, \eta', \varphi') d\eta' \quad (6.5.20)$$

для изотропной поверхности с альбедо  $A$  вместо (6.5.20), согласно (6.2.5), имеем

$$\mathbf{L}^{(r)}(\tau_0, -\eta, \varphi) = \frac{A}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \eta' \mathbf{L}(\tau_0, \eta', \varphi') d\eta'. \quad (6.5.21)$$

Отраженное излучение  $\mathbf{L}^{(r)}(\tau_0, -\eta, \varphi)$  дает дополнительный вклад в излучение, рассеянное на верхней и нижней границах атмосферы. Этот вклад, согласно (6.5.1), вычисляется как

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1(0, -\eta, \varphi) &= \int_0^{2\varphi} d\varphi' \int_0^1 \tilde{\mathbf{T}}(\tau_0, -\eta, \varphi, -\eta', \varphi') \mathbf{L}^{(r)}(\tau_0, -\eta', \varphi') d\eta', \\ \mathbf{L}_1(\tau_0, \eta, \varphi) &= \int_0^{2\varphi} d\varphi' \int_0^1 \tilde{\mathbf{S}}(\tau_0, \eta, \varphi, -\eta', \varphi') \mathbf{L}^{(r)}(\tau_0, -\eta', \varphi') d\eta'. \end{aligned} \quad (6.5.22)$$

Значения  $\mathbf{L}_1(0, -\eta, \varphi)$  и  $\mathbf{L}_1(\tau_0, \eta, \varphi)$  следует прибавить к  $\mathbf{L}(0, -\eta, \varphi)$  и  $\mathbf{L}(\tau_0, \eta, \varphi)$ , соответственно. Однако излучение  $\mathbf{L}_1(\tau_0, \eta, \varphi)$  вновь подвергается отражению, и для него надо вычислить (6.5.20) или (6.5.21) с заменой  $\mathbf{L}(\tau_0, \eta, \varphi)$  на  $\mathbf{L}_1(\tau_0, \eta, \varphi)$ . Полученное уже двукратно отраженное излучение вновь дает добавку к общему излучению согласно (6.5.22), которая суммируется с

$\mathbf{L}(0, -\eta, \varphi)$  и  $\mathbf{L}(\tau_0, \eta, \varphi)$ . Кроме того, эта добавка на нижней границе атмосферы снова отражается от поверхности. И так далее... Итерации прекращаются, когда добавка к общему излучению становится меньше заданной величины, либо по достижению максимально заданного числа отражений.

В сущности, данные итерации реализуют разложение искомой величины в ряд по кратностям отражения (см. раздел 2.4, соотношение (2.4.19)). Однако, согласно разделу 2.4, надо не забывать еще учитывать отражение прямого излучения. Поэтому на самой первой итерации отражения (и только на ней!) к вектору Стокса, вычисленному по формуле (6.5.20) или (6.5.21), добавляем

$$\mathbf{L}_0^{(r)}(\tau_0, -\eta, \varphi) = \exp(-\tau_0 / \eta_0) \mathbf{R}(\eta, \eta_0, \varphi - \varphi_0) \mathbf{L}_0(\eta_0, \varphi_0) \quad (6.5.23)$$

или

$$\mathbf{L}_0^{(r)}(\tau_0, -\eta, \varphi) = \frac{A}{\pi} \exp(-\tau_0 / \eta_0) \eta_0 \mathbf{L}_0(\eta_0, \varphi_0) , \quad (6.5.24)$$

соответственно.

### **Переход к практическому алгоритму МСС**

Итак, выше изложены все необходимые формулы для реализации МСС с учетом поляризации излучения и его отражения от поверхности. Для перехода к схеме практического алгоритма осталось лишь сформировать общую логическую последовательность вычислений и расписать интегралы через квадратурные суммы. Это предоставляем проделать читателю в качестве упражнения. Учтите, что в формулах и под интегралами стоят не скаляры, а произведения векторов и матриц, и что матричные произведения не коммутативные. Заметим, что в этом разделе мы, чтобы дать читателю информацию для размышлений, вновь привели запись соотношений МСС, которая является альтернативной как разделу 3.4, так и монографии [2].

## 7. Дополнительные возможности численных методов

### 7.1. Распространение излучения в сферической атмосфере

#### Задачи переноса излучения в сферической атмосфере

В предыдущих главах мы рассматривали атмосферу как бесконечно протяженный плоский слой. Такая возможность обусловлена малостью геометрической толщины атмосферы (порядка сотни километров) по сравнению с радиусом Земли (6370 км). Но на самом деле следует сравнивать с радиусом планеты не толщину атмосферы, а протяженность трассы распространения излучения в ней  $l$  (см. раздел 1.2), соотношения (1.2.2)-(1.2.5). Для модели плоской атмосферы  $l = |z/\cos \vartheta|$ , где  $z$  – высота,  $\vartheta$  – зенитный или надирный угол распространения излучения. Из этого соотношения вытекает, что при значениях  $\vartheta$ , близких к  $90^\circ$ , геометрическая длина трассы существенно возрастает и модель плоской атмосферы перестает быть адекватной реальности.

Для каких практических задач возможна такая ситуация? Во-первых, существуют специальные схемы дистанционного зондирования атмосферы – сумеречные и лимбовые, когда с поверхности планеты или со спутника осуществляются измерения солнечного излучения, просвечивающего сквозь атмосферу, для них применение плоской модели в принципе невозможно (см. подробнее [1,2,14]). Во-вторых, существует задача оценки применимости приближения плоской атмосферы для моделирования любых измерений, которая не теряет актуальности из-за постоянно возрастающих требований к точности указанного моделирования.

Стандартно принято считать, что плоскую атмосферу можно использовать примерно до зенитных углов солнца и/или зенитных (надирных) углов визирования  $70-75^\circ$ . Однако это утверждение требует проверки модельными расчетами, исходя из условий конкретных задач. Для задач энергетики атмосферы (например, расчета полусферических потоков) обычно всегда используют плоскую модель атмосферы, однако, и этот стандарт – не аксиома и нуждается в модельных проверках. Например, для Марса, радиус которого почти вдвое меньше земного, влияние сферичности атмосферы значительно сильнее.

В этом и следующем разделах мы рассмотрим, во-первых, геометрию переноса излучения в сферической атмосфере, во-вторых, модификации численных методов теории переноса излучения с учетом сферичности.

#### Система координат в сферической атмосфере

Будем следовать устоявшейся традиции и использовать сферическую систему координат. В ряде работ для сферической атмосферы переходят к декартовым координатам, но тогда теряется геометрическая наглядность и связь с плоским случаем, где тоже используется сферическая система координат тоже.

В силу шарообразности Земли (или какой-либо планеты) ее центр естественно принять за центр системы координат. Такая система называется геоцентрической. Тогда в ней координаты любой точки в пространстве описываются тремя величинами: географической широтой  $\vartheta_G$ , географической долготой  $\varphi_G$  и расстоянием от центра координат  $r$  (см. рис.7.1), а их строгие определения приведены в Приложении 12. Вводя радиус Земли (планеты)  $R$ ,

удобно использовать и другую координату  $z = r - R$ , которая равна высоте точки в атмосфере.

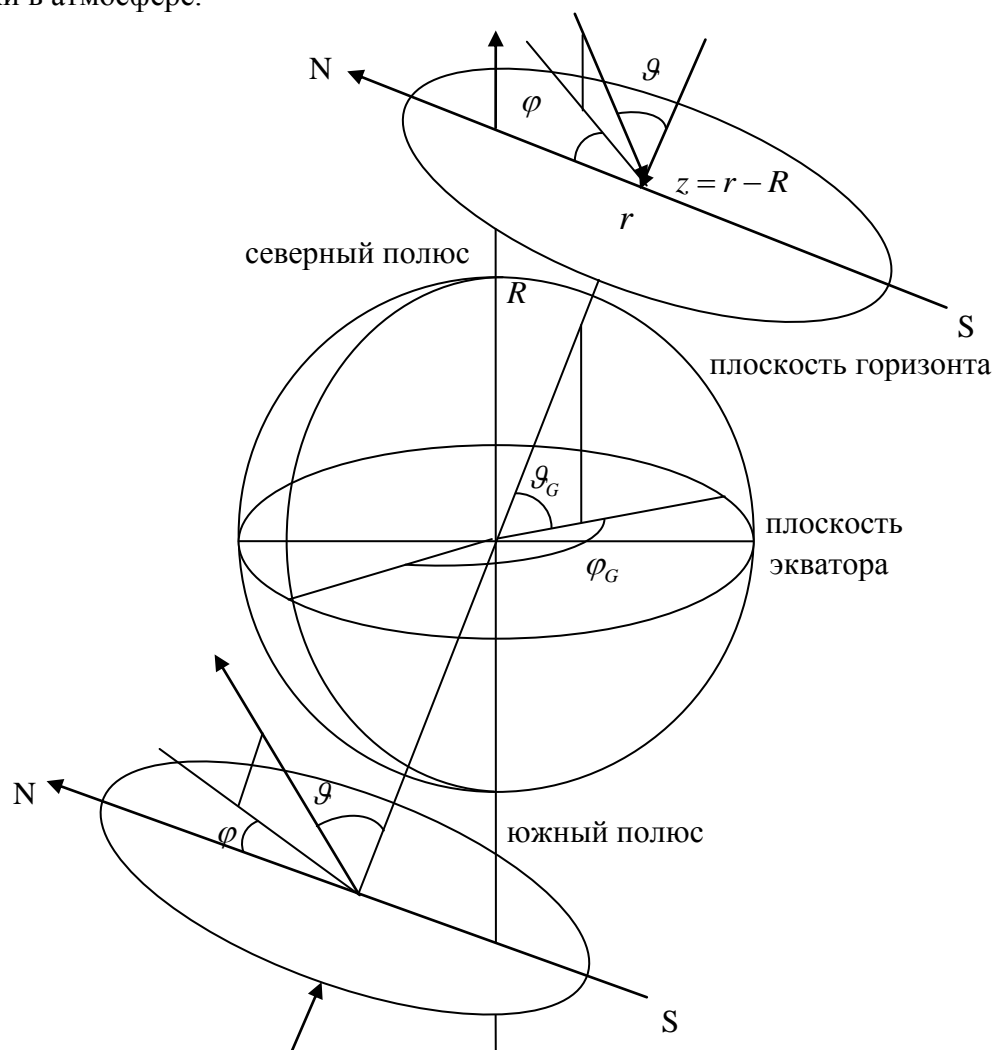


Рис.7.1. Геоцентрическая и локальная системы координат для излучения.

Направление излучения в каждой точке пространства удобно характеризовать теми же величинами, что и в плоском случае: зенитным углом  $\vartheta$  и азимутом  $\varphi$ . Зенитный угол по-прежнему определяется как отклонение излучения от оси “зенит-надир”, которая теперь меняется в зависимости от широты и долготы (рис.7.1). Азимут  $\varphi$  так же, как и раньше, отсчитывается в плоскости, перпендикулярной оси “зенит-надир” – плоскости горизонта, однако, теперь это направление требует согласования для всех точек трассы. Договоримся выбирать его “от севера”, т.е. по стрелке компаса (направление на север  $\varphi = 0$ , на восток –  $\varphi = 90^\circ$  и т.д. по часовой стрелке). Строгие определения зенитного угла и азимута излучения даны в Приложении 12.

Отметим одну важную особенность – излучение в сферической атмосфере описывается не в одной, а в двух разных системах координат – глобальной геоцентрической (координаты  $\vartheta_G, \varphi_G, z$ ) и локальной для каждой точки трассы (координаты  $\vartheta, \varphi$ ). Таким образом, всего имеем пять координат.

### Прицельная высота, наклонные и касательные трассы

Рассмотрим произвольную трассу распространения излучения в сферической атмосфере (рис.7.2).

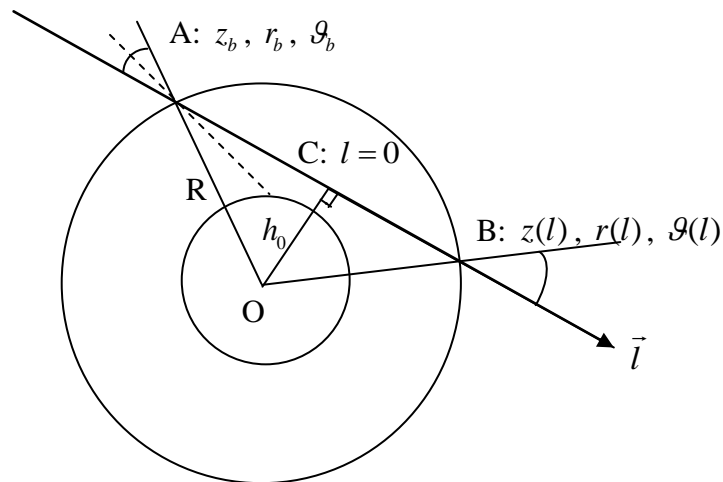


Рис.7.2. Трасса распространения излучения в сферической атмосфере.

Рассмотрим на рисунке 7.2 точку С – ближайшую точку трассы распространения излучения к центру координат О. Обозначим расстояние  $|OC|$  как  $r_0$ . Разность  $h_0 = r_0 - R$  играет важнейшую роль в сферической геометрии переноса излучения и называется прицельной высотой трассы (минимально возможное значение  $h_0 = -R$ ). Трасса для которой  $h_0 \leq 0$ , очевидно, попадает на поверхность планеты и называется наклонной (на рис. 7.2 показана пунктиром). Трасса, для которой  $h_0 > 0$  проходит сквозь атмосферу, не достигая поверхности, такая трасса называется касательной. Третий случай, когда трасса из космоса вообще не пересекает верхнюю границу атмосферы, очевидно, является бессмысленным для задач переноса излучения и далее не рассматривается.

Заметим, что в точке С (точке прицельной высоты) зенитный угол излучения  $\vartheta = 90^\circ$ , что невозможно в плоской геометрии!

#### Отсчет длины на трассе распространения излучения

Введем в задачу еще одну координату – длину  $l$  на трассе распространения излучения  $\vec{l}$ . Она, в смысле координаты, излишняя с формально-математической точки зрения, но очень важна для практики, поскольку именно указанная длина определяет ослабление излучения по закону Бугера – соотношения (1.2.2)-(1.2.5). За точку отсчета этой длины очень удобно принять точку прицельной высоты С (рис. 7.2). Таким образом, в точке С имеем  $l = 0$ , для излучения, прошедшего С (после С),  $l > 0$ , для излучения, не дошедшего до С  $l < 0$ . Подчеркнем, что координата  $l$  не зависит от типа (наклонного или касательного) трассы. Для наклонной трассы точка С для излучения недостижима, однако нуль отсчета  $l$  сохраняется. Иными словами (рис. 7.2) для наклонной трассы координата  $l$  в реальных задачах никогда не меняет знак, а вот для касательной, наоборот, – меняет.



### Пересчет координат на трассе распространения излучения

Главной проблемой переноса излучения в сферической атмосфере является зависимость координат  $(\mathcal{G}, \varphi_G, z, \mathcal{G}, \varphi)$  от точки трассы распространения излучения, т.е. от координаты  $l$ . Таким образом, возникает необходимость получить формулы для этой зависимости, но прежде сделаем два замечания.

Во-первых, необходимо задать начальные значения координат в определенной точке трассы – обозначим ее А. Конкретный выбор точки А диктуется условиями моделируемых измерений и не является однозначным. Например, если для наземных измерений в качестве А естественно выбрать точку нахождения прибора, то для спутниковых измерений такой выбор уже весьма неудобен из-за быстрого изменения положения спутника при его движении по орбите. Поэтому, чтобы не связывать себя конкретикой, выберем в качестве А произвольную точку трассы, в которой будем считать заданными начальные значения всех координат:  $\mathcal{G}_{G,b}, \varphi_{G,b}, z_b, \mathcal{G}_b, \varphi_b$ .

Во-вторых, чтобы не загромождать текст, здесь ограничимся выводом двух наиболее важных при дальнейшем изложении соотношений – для высоты  $z$  и зенитного угла  $\mathcal{G}$ . А вывод остальных искомым формул и собственно их финальные формулировки вынесем в Приложение 12.

Итак, имеем в точке А начальные координаты  $z_b, \mathcal{G}_b$ . Требуется пересчитать их для произвольной точки трассы В с координатой  $l$ , т.е. найти функции  $z(l)$  и  $\mathcal{G}(l)$ .

Из прямоугольного треугольника ОСА получаем

$$R + h_0 = (R + z_b) \sin \mathcal{G}_b, \quad (7.1.1)$$

откуда

$$h_0 = (R + z_b) \sin \mathcal{G}_b - R. \quad (7.1.2)$$

Из прямоугольного треугольника ОСВ имеем

$$z(l) = \sqrt{l^2 + (R + z_b)^2 \sin^2 \mathcal{G}_b} - R, \quad (7.1.3)$$

$$\cos \mathcal{G}(l) = -\frac{l}{\sqrt{l^2 + (R + z_b)^2 \sin^2 \mathcal{G}_b}}, \quad \sin \mathcal{G}(l) = \frac{(R + z_b) \sin \mathcal{G}_b}{\sqrt{l^2 + (R + z_b)^2 \sin^2 \mathcal{G}_b}}. \quad (7.1.4)$$

Отметим, что соотношения (7.1.2)-(7.1.4) справедливы и для тривиального случая  $\mathcal{G}_b = 0$  (излучение из зенита или надира) и что для точки А из треугольника ОСА имеем

$$l_b = -(R + z_b) \cos \mathcal{G}_b. \quad (7.1.5)$$

Для практических вычислений удобна формула для нахождения координаты длины  $l$  по заданной высоте  $z$  в атмосфере. Из (7.1.3) получаем

$$l = \pm \sqrt{(R + z)^2 - (R + z_b)^2 \sin^2 \mathcal{G}_b}, \quad (7.1.6)$$

где знак  $l$  для наклонной трассы определяется ее конкретной геометрией: отрицательный для трассы к поверхности и положительный – от поверхности, а для касательной трассы имеют место оба решения.

### Отсутствие малого параметра

Очень неприятной особенностью формул для сферической атмосферы является невозможность перехода от них к приближению плоской геометрии. Точнее даже, невозможность получения поправок к формулам плоской геометрии в рамках учета сферичности. Стандартно такие поправки

достигаются введением некоего малого параметра, на основе которого потом и осуществляется модификация. Однако в сферической атмосфере такой малый параметр отсутствует. Казалось бы, им может выступить  $z_b/R$ , однако разложение формул (7.1.1)-(7.1.4) по нему неосуществимо, в чем предлагаем убедиться читателю в качестве упражнения. Заметим, однако, что компьютерные вычисления всех геометрических параметров в сферической атмосфере следует проводить с двойной точностью (именно из-за малости  $z_b$  относительно  $R$ ).

Таким образом, перенос излучения в сферической атмосфере и в приближении плоской атмосферы – это две существенно разные задачи, “не пересекающиеся” в рамках теории и численных методов. Хотя в плане конкретных вычислений их результаты тем ближе, чем меньше влияние сферичности, что является очень мощным тестом для взаимного контроля правильности расчетов.

### Приближение однородно-слоистой сферической атмосферы

В плоской геометрии мы использовали приближение горизонтально-однородной атмосферы, все параметры которой определялись только высотой  $z$ . Останемся для сферической атмосферы в рамках этого же предположения – приближения. Поскольку для сферической атмосферы говорить о горизонтальной однородности уже некорректно (при передвижении по горизонтали ее параметры будут меняться из-за изменения высоты), используем термин “однородно-слоистая сферическая атмосфера”.

### Явные формулы для оптического пути

Следуя схеме изложения главы 1, модифицируем соответствующие формулы и алгоритмы для сферической атмосферы.

При расчете оптического пути в атмосфере (1.2.4) нам вновь придется использовать квадратурную формулу трапеций, следовательно соотношения вида (1.2.13), (1.2.14), но только величины  $\tau(z_{i+1}, z)$  придется вычислять для сферической геометрии, причем, теперь, возможно, мы заранее не будем знать, какая из высот слоя  $z_{i+1}$  или  $z_i$  соответствует конкретной границе слоя (например, для касательной трассы). Поэтому сформулируем задачу для произвольных высот в слое и запишем ее в самом общем виде

$$\tau(l_1, l_2) = \int_{l_1}^{l_2} \alpha(z(l)) dl, \quad z_i \leq z(l_1) \leq z_{i+1}, \quad z_i \leq z(l_2) \leq z_{i+1}, \quad l_2 \geq l_1, \quad (7.1.7)$$

то есть будем считать, что формально обе высоты интегрирования  $z(l_1)$  и  $z(l_2)$  могут лежать в пределах слоя атмосферы от  $z_i$  до  $z_{i+1}$ .

Для кусочно-постоянной аппроксимации (1.2.15) получаем

$$\tau(l_1, l_2) = \frac{1}{2} (\alpha_i(z_i) + \alpha_{i+1}(z_{i+1})) (l_2 - l_1), \quad (7.1.8)$$

А для кусочно-линейной аппроксимации (1.2.16) с учетом подстановки (7.1.3) возникающий интеграл сводится к табличному. Исходно имеем

$$\tau(l_1, l_2) = \int_{l_1}^{l_2} (a_i (\sqrt{l^2 + (R + z_b)^2 \sin^2 \vartheta_b} - R) + b_i) dl, \quad (7.1.9)$$

где

$$a_i = \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{z_{i+1} - z_i}, \quad b_i = \frac{\alpha_i z_{i+1} - \alpha_{i+1} z_i}{z_{i+1} - z_i}. \quad (7.1.10)$$

После преобразований получаем

$$\begin{aligned} \tau(l_1, l_2) = & \\ = b_i(l_2 - l_1) + \frac{a_i}{2} & \left( (l_2 z_2 - l_1 z_1) + (R + z_b)^2 \sin^2 \vartheta_b \ln \frac{l_2 + z_2 + R}{l_1 + z_1 + R} - R(l_2 - l_1) \right), \end{aligned} \quad (7.1.11)$$

где  $z_1 = z(l_1)$ ,  $z_2 = z(l_2)$ .

Для кусочно-экспоненциальной аппроксимации (1.2.18) аналитическое интегрирование (7.1.7), к сожалению, невозможно.

Отметим, что для касательной трассы при расчете оптического пути (1.2.4) для случая, когда  $l_0 < 0$  и  $l > 0$ , в однородно-слоистой атмосфере имеет место симметрия. Это позволяет существенно сократить вычисления, переписав (1.2.4) в виде

$$\begin{aligned} \tau(l_0, l) &= 2\tau(l_0, 0) + \tau(|l_0|, l), \text{ если } l \geq |l_0|; \\ \tau(l_0, l) &= \tau(l_0, -l) + 2\tau(-l, 0), \text{ если } l < |l_0|. \end{aligned} \quad (7.1.12)$$

### Оптическая толщина и воздушная масса

В плоской геометрии важную роль играло понятие оптической толщины слоя атмосферы  $\tau(z_\infty, z)$  (1.2.7), в частности – всей атмосферы (при  $z = z_0$ ). Оптическая толщина непосредственно фигурировала в законе Бугера ослабления излучения (1.2.6). Для сферической атмосферы оптическая толщина формально определена тем же соотношением (1.2.7), поскольку на результат интегрирования по вертикали сферичность не влияет. Однако, в сферической модели для наклонной трассы запись закона Бугера в форме (1.2.6) уже невозможна, т.к. переменные “высота” и “зенитный угол” уже не являются независимыми. Но и в этом случае закон Бугера записывают в аналогичном (1.2.6) в форме, которая аналогична формуле (1.2.6)

$$P(z_\infty, z, \vartheta) = \exp(-\tau(z_\infty, z)m(\vartheta)), \quad (7.1.13)$$

где величина  $m(\vartheta)$  называется воздушной массой.

Для плоской модели имеем просто  $m(\vartheta) = 1/\cos \vartheta$ , а для сферической атмосферы с учетом (1.2.5) оно будет следующим

$$m(\vartheta) = \frac{\tau(l(z_\infty), l(z))}{\tau(z_\infty, z)} = \frac{\int_{l(z)}^{l(z_\infty)} \alpha(z(l')) dl'}{\int_z^{z_\infty} \alpha(z') dz'}, \quad (7.1.14)$$

т.е. воздушная масса по определению равна отношению оптического пути в слое атмосферы к его оптической толщине.

Воздушная масса очень удобна при интерпретации наземных измерений прозрачности атмосферы, поскольку соотношение (7.1.13) оказывается единообразным и для плоской, и для сферической модели. Формулой для практических расчетов воздушной массы (в сферической атмосфере) является (7.1.14) с учетом (7.1.6) и (7.1.3). Отметим, что иногда, особенно в сообществе экспериментаторов, утверждают, что воздушная масса  $m(\vartheta)$  – это чисто геометрический фактор. На самом деле это не так. Согласно (7.1.14) она зависит от вертикального профиля объемного коэффициента ослабления  $\alpha(z)$  и эта зависимость для сферической модели не может быть “убрана” из вычислительной формулы. Хотя проявление этой зависимости не всегда

существенно, поскольку проявляется в отношении соответствующих интегральных сумм из-за разных, “несократимых” весов в них.

### Перенос теплового излучения при отсутствии рассеяния

Переходим к материалу разделов 1.3 и 1.4. В формуле (1.3.7) необходимо просто заменить координату  $z$  координатой  $l$  и убрать  $\cos \vartheta$ , т.к. множитель  $1/\cos \vartheta$  неразрывно “привязан” к дифференциалу  $dz$  и при переходе к реальной трассе с координатой  $l$  он “исчезает”. Соотношение (1.3.8) не изменит своей формальной структуры, поэтому для расчета интенсивности теплового излучения с направлением от верхней границы атмосферы ( $z_\infty$ ) получаем

$$I_\lambda(z) = I_\lambda(z_\infty)P_\lambda(l(z_\infty), l(z)) + \int_{l(z_\infty)}^{l(z)} B_e(\lambda, T(z(l'))) \left| \frac{\partial P_\lambda(l', l(z))}{\partial l'} \right| dl', \quad (7.1.15)$$

где функция пропускания определена по (1.2.4)-(1.2.5). Формула (7.1.15) справедлива и для касательной трассы при  $z = z_\infty$ : в этом случае согласно (7.1.6) пределы интегрирования в (7.1.15) и (1.2.4) будут иметь разные знаки.

В вычислительный алгоритм, приведенный в разделе 1.3 и, в полном виде, в Приложении 3, для сферического случая (7.1.15) достаточно внести лишь чисто технические модификации. Опишем их кратко на примере алгоритма Приложения 3, предоставив читателю разобраться в деталях и переписать приведенный там алгоритм в качестве упражнения. Итак: 1) задается конкретная трасса переноса излучения и начальные параметры  $z_b$ ,  $\vartheta_b$  в ее некоторой точке; 2) при вычислении оптического пути в слое используются выражения (7.1.8)-(7.1.11) (в том числе и при прохождении прицельной высоты на касательной трассе); 3) функция пропускания вычисляется через оптический путь (без косинуса); 4) при дроблении слоя используется не оптическая толщина, а оптический путь (дробится именно он с соответствующим пересчетом высот по (7.1.3)), причем дробление осуществляется по параметру  $\Delta \tau_{\max} = -\ln(1 - \Delta P_{\max})$ .

Для формул расчета потоков теплового излучения (1.4.2)-(1.4.3) была существенной плоская геометрия. В сферическом случае их можно использовать как довольно точное приближение. Как упоминалось выше, для потоков сферичность атмосферы обычно не учитывается. Впрочем, можно проверить точность этого приближения, находя потоки численно по (1.1.13), где интеграл по азимуту даст  $2\pi$ , а для сетки по косинусам зенитных углов следует вычислять интенсивности излучения по (7.1.15) с  $z_b = z_0$ ,  $\vartheta_b = \vartheta$ . На самом деле использовать эти формулы можно не для всех зенитных углов, а лишь при  $\vartheta$ , достаточно близких к  $\pi/2$ . В остальных случаях можно продолжать пользоваться формулами для плоской геометрии.

Для интенсивности теплового излучения из нижней полусферы достаточно формально заменить в (7.1.15)  $z_\infty$  на  $z_0$ . Но заметим, что прием “переворота атмосферы” (раздел 1.2) для сферического случая уже неприменим (объясните, почему). Поэтому нужно переформулировать алгоритм Приложения 3 для случая интегрирования “снизу вверх”, включая случай касательных трасс (проделайте в качестве упражнения).

Все результаты, касающиеся взаимодействия теплового излучения с поверхностью, остаются без изменений (1.4.4)-(1.4.12). В них следует лишь учесть, что косинус зенитного угла излучения теперь меняется по трассе

распространения излучения, следовательно, его значения нужно пересчитать на поверхности ( $z = z_0$ ) по соотношениям (7.1.6) и (7.1.4).

### **Учет поляризации теплового излучения**

Хотя геометрия атмосферы сферическая, но трассы, по которым распространяется излучение по-прежнему остаются прямыми линиями. Поэтому все, что сказано в начале раздела 6.2 об учете поляризации теплового излучения при отсутствии рассеяния, без изменений переносится на сферический случай.

## **7.2. Рассеяние излучения в сферической атмосфере**

### **Уравнение переноса рассеянного излучения**

При формулировке уравнения переноса рассеянного излучения в главе 2, мы существенно использовали плоскую модель атмосферы. Переход к сферическому случаю в рамках теории возможен, и соответствующий вид уравнения переноса имеется в литературе. Однако, как отмечает большинство авторов, практического вычислительного смысла это уравнение не имеет, хотя бы потому, что искомая интенсивность зависит в нем уже не от трех, а от пяти переменных. Поэтому при моделировании переноса рассеянного излучения в сферической атмосфере используют либо приближенные методы учета сферичности, либо модификации некоторых численных методов, способных работать в сферической атмосфере, либо комбинацию приближений и конкретных численных методов. Следуя указанной логике, сначала рассмотрим приближенные методы, а потом модификации численных методов. В последнем случае учет сферичности атмосферы допускают лишь метод конечных разностей (МКР) и метод Монте-Карло (ММК).

### **Приближенный учет сферичности атмосферы в задачах рассеяния**

Общим приемом приближенного учета сферичности атмосферы в задачах рассеяния излучения (как солнечного, так и теплового) является: (1) вычисление функции источников во всей атмосфере для плоской геометрии; (2) интегрирование функции источников при вычислении искомой интенсивности уже для сферической модели. То есть сначала вычисляется “плоская” функция источников  $B(\tau, \eta, \varphi)$ , в рамках нашего пособия такую возможность дает метод последовательных порядков рассеяния (МПП, разделы 2.3, 2.5) и метод сферических гармоник (МСГ, раздел 3.1). Далее, в формуле для расчета интенсивности (2.1.13) необходимо, во-первых, перейти от оптической глубины к высоте  $z$ , во-вторых, использовать при интегрировании сферическую трассу. Получаем:

$$I(z, \vartheta, \varphi) = \int_b^{l(z)} B(\tau(z_\infty, z(l')), \eta(l'), \varphi(l')) \exp(-|\tau(z, z(l'))|) dl', \quad (7.2.1)$$

где трасса излучения определяется начальными координатами  $z_b = z$ ,  $\vartheta_b = \vartheta$ ,  $\varphi_b = \varphi$ ;  $b = l(z_0)$  для наклонной трассы от поверхности,  $b = l(z_\infty)$  для наклонной трассы к поверхности и касательной трассы; значение  $\eta(l') = \cos \vartheta(l')$  вычисляется по соотношению (7.1.4); оптические пути в (7.2.1) вычисляются по формулам сферической атмосферы; сетка общего интегрирования (7.2.1) строится по высотным слоям (см. раздел 7.1); формула для расчета величин  $\varphi(l')$  приведена в Приложении 12. Практическое интегрирование в (7.2.1)

следует вести от точки  $z_b = z$ . При задании функции источников  $B(\tau, \eta, \varphi)$  в виде дискретной трехмерной таблицы при вычислениях по (7.2.1) используется трехмерная линейная интерполяция (см. о ней в Приложении 11). Стоит отметить, что (7.2.1) позволяет с высокой точностью рассчитывать значения интенсивности даже для касательной трассы, хотя используемая в ней функция источников  $B(\tau, \eta, \varphi)$  вычисляется для плоской атмосферы.

### Приближение однократного рассеяния солнечного излучения

Рассмотрим это приближение подробнее. Во-первых, потому что оно позволяет получить явные соотношения, имеющие достаточно четкий физический смысл, и поэтому является полезным в учебном плане. Во-вторых, в случае сферической атмосферы это приближение играет значительно более важную роль, чем для плоской атмосферы. Действительно, из физических соображений следует, что чем выше кратность рассеяния излучения, тем слабее влияние сферичности. Причина этого состоит в увеличении из-за рассеяния доли излучения с не слишком большими зенитными углами по сравнению с исходным прямым излучением. Поэтому точное аналитическое решение в приближении однократного рассеяния можно комбинировать с расчетами более высоких порядков рассеяния (от второго и выше) в плоской модели атмосферы. Такую возможность дают МПР и ММК.

Вспоминая материал из начала главы 2, запишем приближение однократного рассеяния сначала для плоской атмосферы (2.1.13)-(2.1.14), вернувшись при этом к вертикальной координате “высота” (2.1.4) и используя для функций пропускания обозначения вида (1.2.6). Получим

$$I(z, \eta, \varphi, \eta_0, \varphi_0) = \frac{F_0}{4\pi} \left| \frac{1}{\eta} \int_z^b \sigma(z') x(z', \chi_0) P(z_\infty, z', \eta_0) P(z', z, \eta) dz' \right|, \quad (7.2.2)$$

где  $(\eta_0, \varphi_0)$  – косинус зенитного угла и азимут Солнца,  $F_0$  – внеатмосферный поток солнечного излучения на перпендикулярную лучам площадку,  $\sigma(z)$  – объемный коэффициент рассеяния,  $\chi_0$  – косинус угла рассеяния (2.1.8). Предел интегрирования выбирается следующим образом:  $b$  есть  $b = z_\infty$ , если  $\eta > 0$ , и  $b = z_0$ , если  $\eta < 0$ .

В выражении (7.2.2) приближение однократного рассеяния имеет простой физический смысл. Рассмотрим высоту  $z'$ . Солнечное излучение доходит до нее, ослабляясь по пути от верхней границы, что представлено множителем  $F_0 P(z_\infty, z', \eta_0)$ . Затем оно рассеивается в направлении  $(\eta, \varphi)$ , чему соответствует множитель  $\sigma(z') x(z', \chi_0) / 4\pi$ . Наконец, это излучение достигает высоты  $z$ , ослабляясь по пути, что учитывается множителем  $P(z', z, \eta)$ . Далее следует проинтегрировать произведение указанных множителей по всей длине трассы от таких высот  $z'$ , с которых с учетом знака  $\eta$  излучение достигает высоты  $z$ , что в итоге дает соотношение (7.2.2).

Очевидно, что приведенное рассуждение полностью переносится и на сферический случай. Следовательно, мы можем формально записать

$$I(z, \eta, \varphi, \eta_0, \varphi_0) = \frac{F_0}{4\pi} \int_{l_1}^{l_2} \sigma(z(l)) x(z(l), \chi_0) P_0(l) P(l) dl, \quad (7.2.3)$$

где  $P_0(l)$  – функция пропускания по трассе от верхней границы атмосферы до точки рассеяния (трасса прямого солнечного излучения),  $P(l)$  – функция

пропускания по трассе от точки рассеяния до высоты  $z$  (трасса рассеянного солнечного излучения). Теперь придадим конкретный смысл элементам формулы (7.2.3).

Начнем с геометрических соотношений. Начальная точка трассы теперь четко фиксирована, поскольку, согласно (7.2.3) имеем  $z_b = z$ ,  $\cos \mathcal{G}_b = \eta$ ,  $\varphi_b = \varphi$ . Однако, появились еще два новых геометрических параметра – зенитный угол и азимут Солнца, которые в сферической атмосфере будут переменными. Естественно привязать их начальные значения к той же стартовой точке, т.е. обозначим  $\eta_{0,b} = \eta_0$ ,  $\varphi_{0,b} = \varphi_0$ . Заметим, что в сферической атмосфере возможно значение  $\eta_0 \leq 0$ . Далее следует получить формулы пересчета косинуса зенитного угла и азимута солнца как функции координаты трассы  $l$ . Эта задача решена в Приложении 12. Здесь понадобится только формула для  $\eta_0(l)$ , поэтому приведем ее в нашей системе обозначений (здесь и далее опуская для краткости индекс “ $b$ ” стартовой точки)

$$\eta_0(l) = \frac{(R+z)\eta_0 - ((R+z)\eta + l)\chi_0}{\sqrt{(R+z)^2(1-\eta^2) + l^2}}. \quad (7.2.4)$$

Прежде чем переходить к функциям пропускания в (7.2.3), заметим, что соотношение для высоты (7.1.3) уже имеется:

$$z(l) = \sqrt{l^2 + (R+z)^2(1-\eta^2)} - R. \quad (7.2.5)$$

Для функции трассы рассеянного излучения при учете (7.1.5) имеем выражение

$$P(l) = \exp\left(-\int_l^{-(R+z)\eta} \alpha(\sqrt{l''^2 + (R+z)^2(1-\eta^2)} - R) dl''\right), \quad (7.2.6)$$

где  $\alpha(z)$  – объемный коэффициент ослабления. Трасса прямого излучения проходит из точки рассеяния с координатой  $l$  до верхней границы атмосферы в направлении Солнца  $(-\eta_0(l), \varphi_0(l))$ . При этом, если  $\eta_0(l) < 0$ , то трасса будет касательной. С учетом сказанного для трассы прямого излучения в формулах (7.1.3) и (7.2.5) принимаем значения  $z_b = z(l)$ ,  $\eta_b = -\eta_0(l)$  и получаем

$$P_0(l) = \exp\left(-\int_{l_1'}^{l_2'} \alpha(\sqrt{l''^2 + (l^2 + (R+z)^2(1-\eta^2))(1-\eta_0^2(l))} - R) dl''\right),$$

$$l_1' = -\eta_0(l)\sqrt{(R+z)^2(1-\eta^2) + l^2},$$

$$l_2' = -\text{sign}(\eta_0(l))\sqrt{(R+z_\infty)^2 - (l^2 + (R+z)^2(1-\eta^2))(1-\eta_0^2(l))}, \quad (7.2.7)$$

где  $\text{sign}()$  – знак аргумента.

Пределы интегрирования в (7.2.3) определяются участком трассы рассеяния, освещенным Солнцем. В сферической атмосфере вовсе не гарантируется, что вся указанная трасса будет освещена. Логика алгоритма нахождения конкретных значений  $l_1$  и  $l_2$  в (7.2.3) достаточно громоздкая, поэтому решение этой задачи вынесено в Приложение 12.

Набор формул (7.2.3)-(7.2.7) и алгоритм нахождения  $l_1$  и  $l_2$  из Приложения 12 полностью решают задачу расчета рассеянного солнечного излучения в сферической атмосфере в приближении однократного рассеяния. При практической реализации вычислений по (7.2.3) интегрирование следует

вести по высотной сетке (см. раздел 7.1). При этом для каждого узла интегрирования на трассе рассеянного излучения необходимо вычислять свою функцию пропускания по трассе прямого излучения (7.2.7). Для касательной трассы рассеянного излучения желательнее включить в сетку интегрирования прицельную высоту. Заметим, что косинус угла рассеяния  $\chi_0$  постоянен для всей трассы рассеяния (объясните, почему) и вычисляется по (2.1.8).

### Метод конечных разностей

Для сферической атмосферы МКР следует рассматривать с явным учетом азимутальной зависимости. Поэтому воспользуемся в качестве основы схемой алгоритма МКР из раздела 6.4, пока исключив из него учет поляризации, т.е. индекс  $l$  и все, с ним связанное. Вариант МКР для сферической атмосферы имеет ряд существенных отличий от своего аналога для плоской модели. Мы сосредоточимся в основном именно на смысле этих отличий и не будем обсуждать различные вычислительные детали (например, необходимые геометрические соотношения), поскольку о них подробно шла речь в разделе 7.1. Предоставляем читателю разобраться в этих тонкостях в качестве упражнения.

Во-первых, надо вернуться от сетки оптических глубин к исходной сетке высот  $z_i$ ,  $i=1, \dots, N$ . Однако теперь ее придется практически удвоить (точное удвоение числа узлов сетки необходимо в случае касательной трассы, задевающей поверхность). При этом удобно вводить отрицательные индексы:  $z_i$ ,  $i=-(N-1), \dots, N-1$ , всего  $2N-1$  точек, причем  $z_{i=0} = z_0$  – нижняя граница атмосферы, а  $z_{|i|} = z_{i'+1}$ , где  $i'$  обозначает индекс в прежней сетке (т.е.  $z_{\pm 1} = z_2$ ,  $\dots$ ,  $z_{\pm(N-1)} = z_N = z_\infty$  – верхняя граница атмосферы).

Сетка косинусов зенитных углов тоже подвергнется существенной переделке. Для сферической атмосферы не будет иметь практического смысла их прежнее деление на две особые части: положительные и отрицательные. Кроме того, для более точного учета сферичности в сетку косинусов можно (нужно!) добавить значение  $\eta=0$  и другие  $\eta$ , близкие к нулю. Следовательно, вместо узлов формулы Гаусса удобнее переходить к сетке формулы трапеций с непостоянным шагом. Поэтому формально имеем вообще произвольную сетку  $\eta_k$ ,  $k=1, \dots, K$ ,  $\eta_1 = -1$ ,  $\eta_K = 1$ . Азимутальная сетка остается прежней  $\varphi_m$ ,  $m=1, \dots, M$ ,  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_M = 2\pi$ .

Упаковываем трехмерную структуру в вектор с помощью соотношения, которое аналогично (6.4.7):

$$u_j \equiv I(z_i, \eta_k, \varphi_m), \quad j = q(i)KM + (k-1)M + m - 1, \\ q(i) = i \text{ при } i \geq 0; \quad q(i) = N + |i| - 1 \text{ при } i < 0, \quad i = -(N-1), \dots, N-1. \quad (7.2.8)$$

Затем возвращаемся к искомому вектору  $u(q(i), k, m)$  и вектору свободного члена  $w(q(i), k, m)$ , а также к матрице системы линейных уравнений  $V(q(i), k, m, q(i'), k', m')$ . Наша задача – заполнить элементы вектора  $\mathbf{w}$  и матрицы  $\mathbf{V}$ . Вначале сделаем их обнуление.

В векторе свободного члена учитываем солнечное излучение

$$u(q(i), k, m) := u(q(i), k, m) + \frac{F_0}{4\pi} \sigma(z_{|i|}) x(z_{|i|}, \chi_0) P(z_\infty, z_{|i|}, \eta_0(z_{|i|})), \quad (7.2.9)$$



где  $P(z_\infty, z_{|i|}, \eta_0(z_{|i|}))$  – функция пропускания трассы прямого солнечного излучения со стартовой точкой  $(z_i, \eta_k, \varphi_m)$  к верхней границе атмосферы, при расчете которой при  $i \geq 0$  присваивание в (7.2.9) производится для любых трасс, а при  $i < 0$  – только для касательных, причем точки с  $i < 0$  должны находиться в начале трассы (освещенная Солнцем верхняя граница атмосферы – точка с  $z_{-(N-1)}$ ). Функция пропускания формально считается равной нулю, если прицельная высота трассы меньше нуля. Зависимость  $\eta_0(z_i)$  означает, что косинус зенитного угла Солнца различен для разных высот. Нужно задать зенитный угол Солнца для какой-то одной точки трассы, а для всех остальных точек трассы он пересчитывается по (7.2.4). Косинус угла рассеяния  $\chi_0$  постоянен на всей трассе.

Для теплового излучения все остается практически без изменений: для всего набора индексов  $i$  добавляем собственное излучение атмосферы  $w(i, k, m) := w(i, k, m) + k(z_{|i|})B_e(\lambda, T(z_{|i|}))$ , где  $k(z)$  – объемный коэффициент поглощения, и излучение поверхности  $w(1, k, m) := w(1, k, m) + \varepsilon_\lambda(\eta_k, \varphi_m)B_e(\lambda, T_s)$ .

В матрицу системы сначала добавим для всего набора индексов глобальную единичную диагональ  $V(i, i, k, k, m, m) := V(i, i, k, k, m, m) + 1$ . Главное отличие от плоского случая состоит в представлении оператора дифференцирования. Теперь его следует вычислять не по оптической глубине, а по геометрической длине трассы распространения излучения. Но какой трассы? По аналогии с плоским случаем это трасса между границами атмосферы. Но теперь трасса не одна, а определяется всем набором углов  $\eta_k$ . Таким образом, мы получаем структуру численного дифференцирования уже с тремя индексами  $D_{i'k}$  (в плоском случае ее роль играло произведение  $\eta_k D_{i'}$ ). В (3.3.2) следует (вместо  $x$ ) подставить координаты длины ( $l$ ) высот  $z_i$  для трасс между границами атмосферы, определяемых направлениями  $\eta_k$ . Причем для наклонных трасс это будут высоты от поверхности до верхней границы атмосферы (т.е. все с  $i = 0, \dots, N-1$ ). Для касательных трасс нужно брать высоты от верхней границы (с  $z_{-(N-1)}$ ) через ближайшую высоту  $z_i$ , которая выше прицельной высоты трассы (для нее в (3.3.2) получим пару соседних длин  $l(z_{-i})$  и  $l(z_i)$ , причем для индексов, меньших  $|i|$ , – нули), и снова до верхней границы (с  $z_{(N-1)}$ ). В качестве стартовой точки указанных трасс, ради общего согласования, следует выбрать высоту, на которой определен косинус зенитного угла Солнца  $\eta_0$ . Добавляем полученную структуру дифференцирования в матрицу системы  $V(i, i', k, k, m, m) := V(i, i', k, k, m, m) + D_{i'k}$ .

Далее добавляем в матрицу оператор рассеяния излучения

$$V(i, i, k, k', m, m') := V(i, i, k, k', m, m') + \frac{F_0}{4\pi} \sigma(z_i) x(z_i, \chi) d^{(\eta)}(1, k', K) d^{(\varphi)}(1, m', M). \quad (7.2.10)$$

Для оператора отражения от поверхности пересчитываем все значения  $\eta_k > 0$  (из определенной выше исходной точки) на поверхность: получим  $\eta_k'(z_0)$ , причем если  $\eta_k'(z_0) > 0$ , то добавляем

$$V(1,1,k,k',m,m') := V(1,1,k,k',m,m') + R_{ll'}(\eta_k, \eta_{k'}, \varphi_m - \varphi_{m'}) d^{(n)}(1,k',K) d^{(\varphi)}(1,m',M) \quad (7.2.11)$$

для всех  $\eta_k < 0$ . Аналогично для прямого солнечного излучения: если  $\eta_0(z_0) > 0$ , то

$$w(1,k,m) := w(1,k,m) + \pi SR(\eta_k, \eta_0(z_0), \varphi_m - \varphi_0) P(z_\infty, z_0, \eta_0) \quad (7.2.12)$$

для всех  $\eta_k < 0$ . Для идеального изотропного отражения

$$R(\eta_k, \eta_{k'}, \varphi_m - \varphi_{m'}) = \frac{\eta_{k'}}{\pi} A. \text{ Модель идеального зеркального отражения порождает}$$

проблему, т.к. для нее в (7.2.11) возможно только  $\eta_k = -\eta_{k'}(z_0)$ , а такого значения может не быть в сетке косинусов. Выход здесь состоит в том, чтобы задавать стартовую точку на поверхности или игнорировать зависимость от высоты, а расчеты при условии  $\eta_k(z_0) \equiv \eta_{k'}$ , т.е. фактически это переход к плоской модели отражения.

После формирования матрицы системы и вектора свободного члена получаем решение по соотношению (6.4.13) (см. замечание об ускорении вычислений). Распаковываем линейный вектор в искомое решение по формулам, аналогичным (6.4.14), причем решение имеет физический смысл только для  $i = 0, \dots, N-1$ :

$$\begin{aligned} I(z_i, \eta_k, \varphi_m) &\equiv u_j, \quad j = 1, \dots, (2N-1)KM; \\ q &= \text{int}(j/KM), \quad i = q, \text{ если } q < N, \quad i = N-1-q, \text{ если } q \geq N, \\ k &= 1 + \text{int}((j - qKM)/M), \\ m &= 1 + j - qKM - kM, \end{aligned} \quad (7.2.13)$$

При внимательном анализе можно заметить, что приведенная схема МКР содержит неточности в учете сферичности атмосферы. Действительно, прямое солнечное излучение учитывается только для сетки  $z_i$  (т.е. фактически вертикального столба), а для “боковых столбов”, где это излучение тоже присутствует, его косинус и азимут должны уже быть несколько иными. Эти недостатки связаны с тем, что мы решаем по МКР упрощенную трехмерную задачу переноса излучения (как бы псевдоплоскую). В реальности, как отмечено в начале этого раздела, координат должно быть пять. Тем не менее, указанный способ учета сферичности в МКР принято считать достаточно точным. Его недостатки – это уже эффекты “второго порядка малости”, хотя они могут проявляться при определенных схемах моделирования (например, сумеречного зондирования атмосферы).

### Метод Монте-Карло

Для ММК в сферическом случае также следует перейти от оптической глубины к высоте  $z$ , однако, как выяснится ниже, удобно сохранить как координату еще и оптическую глубину  $\tau$  (напомним, высотные сетки  $z_i$  и  $\tau_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  согласованы).

При стандартном моделировании “от источника”, в частности для случая расчета полусферических потоков, в ММК возникает та же проблема, которая только что описана для МКР. Придется либо приписывать излучению Солнца на верхней границе атмосферы единые координаты, как и в сферическом случае (т.е. соглашаться на присутствие неточности), либо рассматривать все пять пространственных координат (включая широту и долготу) и моделировать эти

географические координаты на верхней границе случайным образом (по равномерному распределению), а затем уже точно определять для них зенитный угол и азимут Солнца. Впрочем, для ММК включение двух дополнительных координат не является такой уж проблемой, если учесть, что диапазон широт и долгот следует выбирать не по всему освещенному полушарию планеты, а по значительно более узкой области (т.е. локально), исходя из возможности попадания фотонов от солнца в приемники излучения. Выбор такого локального участка планеты можно проводить в рамках численных экспериментов (с постепенным расширением до тех пор, пока он не перестанет значимо влиять на точность результатов расчетов). Обдумайте в качестве упражнения возможность описанной модификации алгоритмов ММК для потоков и интенсивностей из разделов 4.3, 4.4, опираясь на приводимый ниже пример, напишите схемы соответствующих алгоритмов.

Мы, однако, не будем этим заниматься, поскольку воспользуемся уникальной возможностью точного учета в ММК сферичности атмосферы при расчетах интенсивности в рамках простой “трехмерной” геометрии. Рассмотрим схему моделирования “от приемника”, т.е. по обратным траекториям (см. раздел 4.4). В этой схеме координаты источника определены однозначно, следовательно, пересчитывая при блужданиях фотона в атмосфере координаты Солнца (они в этой схеме являются координатами приемника), можно строить точные локальные оценки. Как всегда для ММК, разумнее не пускаться в рассуждения, а сразу привести схему вычислительного алгоритма.

Схема алгоритма расчета интенсивности рассеянного солнечного излучения в сферической атмосфере по ММК. Чтобы не повторяться, возьмем при ее построении за основу алгоритм раздела 4.3 и будем ссылаться на него, сохраняя все обозначения. Для расчета интенсивности используем ПЛО, потому что в сферическом случае для ДЛО возникнет дополнительная проблема выбора промежуточной точки рассеяния (проанализируйте возможность использования ДЛО в качестве упражнения). При этом для трасс к верхней границе атмосферы используем схему “без вылета”.

1) Задаются модели атмосферы и поверхности, причем предварительные вычисления для индикатрис рассеяния и отражения выполняются без изменений.

2) Задаются координаты для вычисления интенсивности: высота  $z^*$  и соответствующая ей оптическая глубина  $\tau^*$ , косинус зенитного угла  $\eta^*$  и азимут направления излучения  $\varphi^*$ . В этой же точке пространства заданы косинус зенитного угла и азимут Солнца  $\eta_0^*$  и  $\varphi_0^*$ . В отличие от плоской модели для сферического случая при вычислении интенсивности, выходящей через верхнюю границу атмосферы, задание высоты  $z^*$  не является произвольным. Поэтому будем полагать  $z^* = z_\infty$ , т.е. задавать все координаты строго на уровне верхней границы атмосферы. На практике обычно бывает  $z^* > z_\infty$  ( $z_\infty$  - высота спутника), поэтому координаты следует просто пересчитать по формулам Приложения 12.

3) Задаются те же внутренние параметры расчетов ( $M$ ,  $d$ ,  $M_1$ ), добавим к ним еще минимальный вес фотона  $w_{\min}$  (см. раздел 4.3) и предельный косинус учета сферичности  $\eta_{\min}$ , диапазон и смысл которого будет объяснен ниже.

4) Обнуляются счетчики интенсивности и ее дисперсии  $\xi_1(z^*, \eta^*, \varphi^*) = 0$  и  $\xi_2(z^*, \eta^*, \varphi^*) = 0$ , соответственно. Отметим, что при моделировании по обратным траекториям можно вычислить только одну интенсивность (с заданными  $(z^*, \eta^*, \varphi^*)$ ), но, при желании, для набора различных координат Солнца  $(\eta_0^*, \varphi_0^*)$ .

5) Организуется цикл по траекториям фотонов  $m = 1, \dots, M$ .

6) Старт фотона (из приемника). Присваиваем:  $z = z^*$ ,  $\tau = \tau^*$ ,  $\eta = -\eta^*$ ,  $\varphi = \pi + \varphi^*$ ,  $\eta_0 = \eta_0^*$ ,  $\varphi_0 = \varphi_0^*$ ,  $w = 1$ ,  $\xi(z^*, \eta^*, \varphi^*) = 0$ .

7) Моделируется длина свободного пробега фотона. Основные отличия от плоского случая состоят в этой и следующей операциях алгоритма. Для трассы с начальными координатами  $(z, \eta, \varphi)$  вычисляем оптический путь  $\tau_{\max}$  до границы атмосферы (см. раздел 7.1), суммируя соотношения вида (7.1.7)-(7.1.11). Для всей трассы запоминаем значения координаты  $l_j$ , соответствующие пересекаемым уровням высотной сетки  $z_j$  и значения оптического пути  $\tau_j(l_j)$  в указанных точках (см. Приложение 12). Моделируем оптический путь фотона  $\Delta\tau$  аналогично (4.2.4) как

$$\Delta\tau = -\ln r, \quad (7.2.14)$$

а для схемы “без вылета” для трассы к верхней границе атмосферы (возможно – касательной) аналогично (4.3.3)

$$\Delta\tau = -\ln(1 - r(1 - p^\uparrow)), \quad (7.2.15)$$

где

$$p^\uparrow = \exp(-\tau_{\max}), \quad (7.2.16)$$

при этом (для схемы “без вылета”) пересчитываем вес фотона

$$w := w(1 - p^\uparrow). \quad (7.2.17)$$

Если  $w < w_{\min}$ , то переход на 11-ую операцию алгоритма. Укажем, что расчет оптического пути до границы атмосферы,  $\tau_{\max}$ , существенно увеличивает время вычислений по сравнению с плоской моделью, поэтому для их ускорения вводится параметр  $\eta_{\min}$ . Будем считать, что если  $|\eta| \leq \eta_{\min}$ , то моделирование свободного пробега производится с вычислением  $\tau_{\max}$  по формулам сферического случая, а в противном случае (если  $|\eta| > \eta_{\min}$ ) – используются формулы для плоского случая, в которых  $\tau_{\max} = (\tau_0 - \tau)/\eta$  при  $\eta > 0$  и  $\tau_{\max} = \tau/|\eta|$  при  $\eta < 0$ . Таким образом, параметр  $\eta_{\min}$  играет роль “переключателя” между плоской и сферической моделями и позволяет их комбинировать в рамках единого алгоритма, включая возможность полного “включения-выключения” (при  $\eta_{\min} < 0$  работает только плоская модель, а при  $\eta_{\min} > 1$  – только сферическая).

8) Определяется новое положение фотона. Если  $\Delta\tau \geq \tau_{\max}$ , то фотон достиг границы атмосферы, в данной конкретной схеме (7.2.14)-(7.2.16) это может быть только нижняя граница. В этом случае находим для трассы (напомним, что ее начальные координаты  $(z, \eta, \varphi)$ ) координату  $l$  при  $z = z_1$  по (7.1.6). Если  $\Delta\tau < \tau_{\max}$ , то фотон остался в атмосфере. В этом случае для сферической схемы ( $|\eta| \leq \eta_{\min}$ ) находим координату  $l$  по сформированному в

седьмой операции алгоритма массиву  $\tau_j(l_j)$  (см. алгоритм в Приложении 12). Для плоской схемы находим оптическую глубину  $\tau' = \tau + \eta \Delta \tau$ , затем по ней – высоту  $z(\tau')$  (см. алгоритм в Приложении 12). Наконец, по  $z(\tau')$  рассчитываем координату на трассе  $l$  по (7.1.6). По значению  $l$  для всех случаев пересчитываем  $z(l)$ ,  $\eta(l)$ ,  $\varphi(l)$ ,  $\eta_0(l)$ ,  $\varphi_0(l)$ , присваиваем новые координаты фотона  $z = z(l)$ ,  $\eta = \eta(l)$ ,  $\varphi = \varphi(l)$ ,  $\eta_0 = \eta_0(l)$ ,  $\varphi_0 = \varphi_0(l)$ . При попадании фотона на поверхность присваиваем  $\tau = \tau_1$ , если фотон остался в атмосфере, то для плоской модели просто присваиваем  $\tau = \tau'$ , для сферической вычисляем  $\tau(z)$  по соотношениям (1.2.14)-(1.2.16). Для фотона, оставшегося в атмосфере, делаем переход на 9-ую операцию алгоритма, а для достигшего поверхности – на 10-ую.

9) Взаимодействие фотона с атмосферой. Пересчитываем вес фотона  $w := w\Lambda(z)$ . Если  $w < w_{\min}$ , то переход на 11-ую операцию алгоритма. Здесь и далее определение параметров атмосферы, как функций высоты, описано в 12-ой операции “плоского” алгоритма раздела 4.3 (с формальной заменой  $\tau$  на  $z$ ). Если  $\eta_0 > 0$  или  $\eta_0 \leq 0$ , но при этом  $h_0 > z_0$ , где  $h_0 = (R + z)\sqrt{1 - (\eta_0)^2} - R$ , то производим запись в счетчик с ПЛЮ типа (4.4.1) по “обратной солнечной трассе” с  $\eta_0' = -\eta_0$ ,  $\varphi_0' = \pi + \varphi_0$ :

$$\xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) := \xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) + w \frac{x(z, \chi)}{4\pi} \exp(-\tau'),$$

$$\chi = \eta \eta_0' + \sqrt{(1 - \eta^2)(1 - (\eta_0')^2)} \cos(\varphi - \varphi_0'), \quad (7.2.18)$$

где  $\tau'$  - оптический путь по трассе со стартовыми координатами  $(z, \eta_0')$  до верхней границы атмосферы. Здесь тоже можно использовать переключатель сферичности: если  $|\eta_0'| \leq \eta_{\min}$ , то вычисления  $\tau'$  по сферической модели, если же  $|\eta_0'| > \eta_{\min}$ , то имеем просто  $\tau' = \tau / |\eta_0'|$ . Затем без всяких изменений по сравнению с плоским случаем моделируем угол рассеяния и определяем новое направление фотона после рассеяния  $(\eta, \varphi)$ , а после этого делаем переход на 7-ую операцию алгоритма.

10) Взаимодействие фотона с поверхностью. Пересчитываем вес  $w := wA(\eta, \varphi)$ , где  $A(\eta, \varphi)$  – альбедо (см. раздел 4.3 и Приложение 11). Если  $w < w_{\min}$ , то делаем переход к 11-ой операции алгоритма. Для идеальной изотропной поверхности  $A$  является константой. А для идеальной зеркальной поверхности при моделировании отражения по ММК возникают проблемы, упоминавшиеся в разделе 4.4, но обсудим их после завершения алгоритма. Если  $\eta_0 > 0$ , то записываем в счетчик с ПЛЮ типа (4.4.2) по “обратной солнечной трассе”

$$\xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) := \xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*) + w \rho^{(r)}(\eta, |\eta_0'|, \varphi, \varphi_0') \exp(-\tau'), \quad (7.2.19)$$

где смысл величин  $\eta_0'$ ,  $\varphi_0'$ ,  $\tau'$  остается тем же, что и в 9-ой операции алгоритма. Далее без всяких изменений по сравнению с плоским случаем моделируется новое направление фотона после отражения  $(\eta, \varphi)$ , после чего делаем переход на 7-ую операцию алгоритма.

11) Конец траектории. Делаем запись в счетчики

$$\begin{aligned}\xi_1(z^*, \eta^*, \varphi^*) &= \xi_1(z^*, \eta^*, \varphi^*) + \xi(z^*, \eta^*, \varphi^*), \\ \xi_2(z^*, \eta^*, \varphi^*) &= \xi_2(z^*, \eta^*, \varphi^*) + (\xi(z^*, \eta^*, \varphi^*))^2.\end{aligned}\quad (7.2.20)$$

12) Анализ продолжения вычислений и их окончание. Логика здесь та же, что в плоском случае, но итоговые формулы расчета чуть иные. Вместо первого соотношения (4.4.6) имеем

$$I(z^*, \eta^*, \varphi^*) = F_0 \xi_1(z^*, \eta^*, \varphi^*) / m, \quad (7.2.21)$$

а вместо третьего

$$s(I(\tau^*, \eta^*, \varphi^*)) = F_0 \sqrt{\mathbf{D}(\xi(\tau^*, \eta^*, \varphi^*))} / m. \quad (7.2.22)$$

Конец алгоритма.

Сразу обратим внимание на отличие итоговых соотношений (7.2.21)-(7.2.22) от формул плоского случая (4.4.6). Проанализируйте их и объясните причину отличий в качестве упражнения. Обратите внимание также на отличие сферических ПЛО (7.2.18)-(7.2.19) от плоских (4.4.1)-(4.4.2).

Последнее, что нам осталось сделать в рамках “сферического” ММК, это получить аналог ПЛО для идеального зеркального отражения (4.4.4). В сферическом случае из-за изменения углов вдоль трассы возникает задача нахождения такого начального (в текущей точке с высотой  $z$ ) значения косинуса зенитного угла трассы  $\eta'$ , чтобы в точке отражения мы имели  $\eta_0(l) = \eta'(l)$  (условие идеального зеркального отражения). Задача нахождения  $\eta'$  решена в Приложении 12. Таким образом, для ПЛО идеального зеркального отражения (4.4.4) в сферическом случае мы получаем

$$\begin{aligned}\xi(z^*, \eta^*, \varphi^*) &:= \xi(z^*, \eta^*, \varphi^*) + w \frac{x(z, \chi')}{4\pi} \exp(-\tau') r(\eta_0(l)) \exp(-\tau''), \\ \chi' &= \eta \eta' + \sqrt{(1-\eta^2)(1-(\eta')^2)} \cos(\varphi - \varphi_0'), \quad \varphi_0' = \pi + \varphi_0\end{aligned}\quad (7.2.23)$$

где  $\tau'$  – оптический путь от текущего положения фотона до поверхности со стартовыми координатами  $(z, \eta')$  (разумеется, что трасса распространения фотона должна достигать поверхности),  $\eta_0(l)$  – косинус зенитного угла солнца на поверхности, рассчитанный по данной трассе,  $\tau''$  – оптический путь от поверхности до верхней границы атмосферы со стартовыми координатами  $(z_1, -\eta_0(l))$ .

### Поляризация рассеянного излучения в сферической атмосфере

Для полного завершения темы сферической модели атмосферы при рассеянии излучения нам осталось еще рассмотреть учет поляризации (глава 6). Пройдем по материалу этого раздела и посмотрим возможности модификации его алгоритмов для поляризованного излучения.

Для приближения, в котором получена формула (7.2.1), учет поляризации делается простым образом. Достаточно получить векторную функцию источников плоского случая и применить аналог указанного соотношения. Для приближения однократного рассеяния (7.2.3) тоже достаточно ограничиться формальной заменой индикатрисы на совокупную матрицу рассеяния. При этом, поскольку углы между направлениями (прямыми линиями!) не зависят от типа модели (плоской или сферической), достаточно задать систему координат поляризации (в плоскости, перпендикулярной направлению распространения излучения) в любой точке трассы (но удобнее всего в точке вычисления интенсивности) и сохранять ее неизменной для всей формулы (7.2.3).

Проблемы, как всегда, начинаются для многократного рассеяния. Для МКР практически единственным способом учета поляризации остается “плоское приближение”, т.е. задание координат поляризации в одной точке трассы (там, где определены  $(\eta_0, \varphi_0)$ ) и далее использование в (7.2.9), (7.2.10) совокупной матрицы рассеяния, такой же, как в плоском случае. То есть, пренебрежение изменением углов вращения на трассах распространения излучения. Такое приближение обусловлено уже отмеченной нереальностью применения МКР для всех пяти пространственных координат (включая географические широту и долготу), потому нельзя пересчитать координаты вертикальной оси, от которой в плоском случае отсчитывались координаты поляризации (раздел 6.3).

Напротив, в приведенном алгоритме ММК по схеме обратных траекторий строгий учет поляризации достаточно прост. Для этого удобно максимально использовать уже имеющиеся формулы плоской геометрии, следовательно, как и там, отсчитывать локальные координаты поляризации от вертикали. Таким образом, в стартовой точке траектории (она же – точка вычисления вектора Стокса) координаты поляризации отсчитываются от вертикальной оси (см. раздел 6.3). Возможно, это не слишком удобно на практике, поскольку, например, лучше отсчитывать координаты от направления на север. Но в нашем случае есть весомые причины придерживаться стандартной схемы теории переноса. Для других координат поляризации, всегда можно найти углы вращения и воспользоваться матрицами поворота вида (6.1.20).

Для трассы фотона в сферической атмосфере вертикальная ось меняется от точки к точке. Покажем, однако, что это не существенно. Во-первых, в каждой локальной точке рассеяния поляризационные базисы по-прежнему отсчитываются от вертикали, т.е. сохраняются все те же формулы, что для плоского случая. Во-вторых, при пробеге фотона между точками рассеяния (по прямой!) ориентация поляризационных базисов меняться не может. В-третьих, после свободного пробега мы пересчитываем для новой локальной точки косинус зенитного угла и азимут фотона (чего не было в плоском случае!) и именно таким образом учитываем изменение ориентации вертикальной оси.

Итак, модификация приведенного выше алгоритма ММК в сферической атмосфере для учета поляризации достаточно проста: надо ввести векторный вес фотона и совокупные матрицы рассеяния и отражения. Перепишите в качестве упражнения приведенный в этом разделе алгоритм вычисления интенсивности по ММК, включив в него поляризацию.

### 7.3. Атмосферная рефракция

#### Природа явления

Атмосферной рефракцией называется комплекс оптических явлений, вызванных пространственными и временными вариациями показателя преломления атмосферного воздуха  $\tilde{n}$  (см. подробнее, например, [1,2]). Классификация явлений рефракции и их анализ, включая вывод соотношений, подробно изложены в [2].

Учитывая прикладной стиль данного пособия, нас в первую очередь будет интересовать учет рефракции в вычислительных алгоритмах переноса излучения. При этом мы ограничимся рассмотрением регулярной рефракции, т.е. оптических явлений, связанных с плавным убыванием  $\tilde{n}$  с высотой

вследствие уменьшения плотности воздуха. Для описания рефракции применима только сферическая модель атмосферы. При этом, как и в разделах 7.1 и 7.2, мы ограничимся рассмотрением однородно-слоистой атмосферы, для которой считаем, что показатель преломления воздуха  $\tilde{n}$  зависит только от высоты  $z$ .

### Уравнение траектории светового луча

Пусть излучение, имеющее направление  $\vec{l}$ , падает на слой толщиной  $ds$  (см. рис.7.3). Показатель преломления слоя меняется от  $\tilde{n}(s)$  до  $\tilde{n}(s) + \frac{\partial \tilde{n}(s)}{\partial s} ds$ .

В результате преломления на границе слоя с разными показателями излучение изменит свое направление на  $\vec{l}'$ . Таким образом, рефракция приводит к искривлению световых лучей, т.е. траектория распространения излучения перестает быть прямой линией. Согласно известному закону преломления  $\left(\tilde{n}(s) + \frac{\partial \tilde{n}(s)}{\partial s} ds\right) \sin \gamma_2 = \tilde{n}(s) \sin \gamma_1$ , где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  – углы между направлениями  $\vec{l}$ ,  $\vec{l}'$  и градиентом показателя преломления  $\vec{\nabla} \tilde{n}$ , соответственно (см. рис.7.3).

Записывая  $\gamma_2 = \gamma_1 + \frac{\partial \gamma}{\partial l} dl$ , обозначая  $\gamma_1$  как  $\gamma$  и учитывая  $dl = ds / \cos \gamma$  получаем для угла отклонения  $d\gamma$  уравнение

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s} = -\sin \gamma \frac{1}{\tilde{n}(s)} \frac{\partial \tilde{n}(s)}{\partial s}. \quad (7.3.1)$$

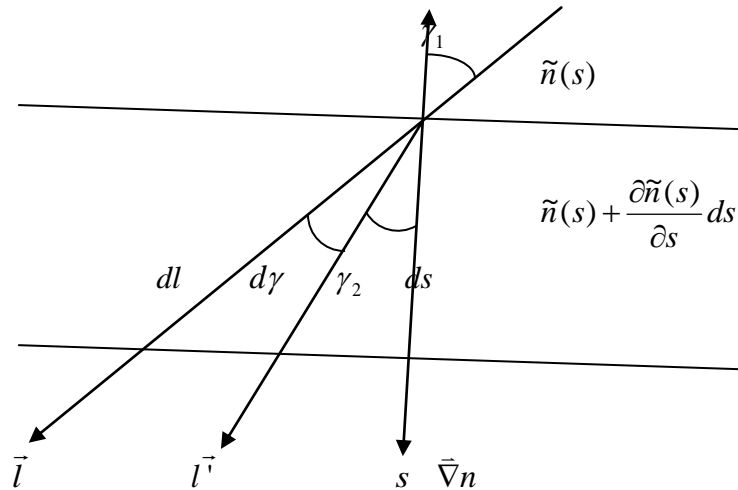


Рис.7.3. К выводу уравнения рефракции.

Уравнение (7.3.1) позволяет полностью определить траекторию светового луча, если учесть, что согласно законам преломления, векторы  $\vec{l}$ ,  $\vec{l}'$  и  $\vec{\nabla} \tilde{n}$  лежат в одной плоскости. В [15] показано, что с математической точки зрения уравнение (7.3.1) эквивалентно уравнению движения материальной точки в потенциальном поле. Это позволяет использовать для расчета траекторий световых лучей аппарат теоретической механики.



### Траектория светового луча в однородно-слоистой атмосфере

В однородно-слоистой атмосфере мы имеем зависимость  $\tilde{n}(z)$ , градиент показателя преломления направлен вдоль вертикальной оси. Следовательно, угол  $\vartheta$  совпадает с зенитным углом  $\mathcal{G}$ , а координата  $s$  – с геоцентрической координатой  $r$ . Траектория луча полностью лежит в плоскости, изображенной на рис. 7.2. Если рефракция отсутствует, то справедливо геометрическое соотношение для минимального расстояния трассы от начала координат (7.1.1), из которого в силу произвольного выбора начала трассы следует  $r \sin \mathcal{G} = r_b \sin \mathcal{G}_b$ . Но соотношение  $r \sin \mathcal{G}(r) = \text{const}$  есть простое следствие теоремы синусов для треугольников со сторонами из радиус-векторов. Эта теорема верна и для криволинейной трассы, если разбить ее на совокупность элементарных отрезков. Значит, при наличии рефракции для одного такого отрезка также выполняется  $r \sin \mathcal{G} = r_b \sin \mathcal{G}'$ , но угол  $\mathcal{G}'$  – это внутренний угол треугольника, он уже не равен внешнему зенитному углу  $\mathcal{G}_b$  вследствие преломления, что легко понять из рис. 7.2 при рассмотрении излома линии  $\vec{l}$  в точке  $z_b$ . Из закона преломления следует соотношение  $\sin \mathcal{G}' = \frac{n(r_b)}{n(r)} \sin \mathcal{G}_b$ , откуда

$$r\tilde{n}(r) \sin \mathcal{G}(r) = r_b \tilde{n}(r_b) \sin \mathcal{G}_b. \quad (7.3.2)$$

Соотношение (7.3.2) справедливо для любых смежных элементарных отрезков трассы, следовательно, в силу произвольности выбора стартовой точки оно остается справедливым и для всей трассы распространения излучения. Таким образом, произведение  $r\tilde{n}(r) \sin \mathcal{G}(r)$  является инвариантом при распространении излучения в однородно-слоистой атмосфере. Более строгий и подробный вывод формулы (7.3.2) имеется в [1,2]. Поскольку  $dl = -dr / \cos \mathcal{G}(r)$ , выражая косинус из (7.3.2), получаем дифференциал длины дуги траектории излучения

$$dl = \text{sign}(\mathcal{G}(r) - \pi/2) \frac{r\tilde{n}(r)}{\sqrt{r^2 \tilde{n}^2(r) - r_b^2 \tilde{n}^2(r_b) \sin^2 \mathcal{G}_b}} dr, \quad (7.3.3)$$

где  $\text{sign}(x)$  – функция, выдающая знак аргумента; разберите в качестве упражнения по рис. 7.2, зачем она нужна и как согласуются знаки  $dl$  и  $dr$ .

#### Угол рефракции

Пусть известна и стартовая точка трассы  $(z_b, \mathcal{G}_b)$ , и точка прихода излучения  $(z^*, \mathcal{G}^*)$ . На практике это соответствует наблюдению источника излучения (например, звезды) через атмосферу, причем просто наблюдению(!), измерения характеристик излучения (интенсивности) не обязательны. В этом случае основной характеристикой является угол рефракции, т.е. отклонение зенитного угла  $\mathcal{G}^*$  от значения, которое он имел бы при отсутствии рефракции (т.е. если бы трасса была прямой линией). Для его нахождения достаточно проинтегрировать соотношение (7.3.1) по длине трассы с дифференциалом (7.3.3). При этом учтем, что в общем случае между высотами  $z_b$  и  $z^*$  могут существовать две трассы: “короткая” и “длинная” (т.е. касательная). Вторая возможность осуществляется, если приемник излучения геометрически находится за точкой трассы с высотой от поверхности Земли  $h_0$ , для которой  $\mathcal{G}(r) = \pi/2$ , что с учетом (7.3.2) дает

$$h_0 = (R + z_b) \tilde{n}(z_b) \sin \mathcal{G}_b / \tilde{n}(h_0) - R. \quad (7.3.4)$$

Заметим, что в отличие от своего аналога (7.1.1) для случая отсутствия рефракции, соотношение (7.3.4) является уравнением относительно  $h_0$ , для которого решения  $h_0 < 0$  невозможны в силу того, что показатель преломления воздуха  $\tilde{n}(z)$  определен только при  $z \geq 0$ . Поэтому высота  $h_0$ , даже если и существует, уже не играет столь важной роли начала отсчета длины, как для расчетов без учета рефракции.

Ради единообразия формул для угла рефракции как на “коротких”, так и на касательных трассах используем несколько искусственно усложненную, но удобную и для формального анализа, и для практических расчетов, форму записи

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{G}^* = & \\ = -\text{sign} \left( \mathcal{G}_b - \frac{\pi}{2} \right) r_b \tilde{n}(z_b) \sin \mathcal{G}_b & \left( \int_{z_b}^{j(z^*)h_0 + (1-j(z^*))z^*} \frac{d \ln \tilde{n}(z') / dz}{\sqrt{(R+z')^2 \tilde{n}^2(z') - r_b^2 \tilde{n}^2(z_b) \sin^2 \mathcal{G}_b}} dz' - \right. \\ & \left. - j(z^*) \int_{h_0}^{z^*} \frac{d \ln \tilde{n}(z') / dz}{\sqrt{(R+z')^2 \tilde{n}^2(z') - r_b^2 \tilde{n}^2(z_b) \sin^2 \mathcal{G}_b}} dz' \right), \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

где индексная функция  $j(z^*)$  равна единице, если трасса касательная (следовательно, существует высота  $h_0$  как решение уравнения (7.3.4)) и равна нулю, если трасса “короткая”.

О практических особенностях вычислений интегралов вида (7.3.5) по кривым трассам рефракции поговорим ниже. А пока отметим, что угол рефракции согласно (7.3.5) определяется зависимостью показателя преломления воздуха от высоты. Следовательно, измеряя один только угол рефракции, можно получать информацию о высотном профиле  $\tilde{n}(z)$  и тех параметров, от которых он зависит (плотность воздуха, его температура и влажность). На таких измерениях основана дистанционная рефрактометрия, представляющая собой специальный метод дистанционного зондирования [2]. В видимом диапазоне источниками излучения для дистанционной рефрактометрии являются Солнце, Луна, звезды. В последнее время активно развиваются методы дистанционной рефрактометрии в сантиметровом радиодиапазоне, где в качестве источников излучения используются спутники глобальной навигационной системы [14].

### **Дифференциальное уравнение переноса излучения с учетом рефракции**

Вернемся к нашей основной задаче, т.е. к вычислению интенсивности излучения в атмосфере. Оказывается, что при учете рефракции приходится возвращаться к самым истокам ее решения, потому что изменения касаются даже исходного дифференциального уравнения переноса (1.2.1). Приведем здесь сверхкраткий вывод уравнения переноса излучения в самом общем случае.

Как и прежде (см. [1,2] и раздел 1.2), изменение интенсивности излучения  $dI$ , согласно закону сохранения энергии, определяются долей ослабления  $- \alpha dl$  и долей генерируемого средой собственного излучения  $\varepsilon dl$ :  $dI = (-\alpha I + \varepsilon) dl$ . Но сейчас для стоящего в левой части полного дифференциала учтем (кроме искривления трассы распространения фотона) возможные изменения интенсивности излучения как со временем, так и в зависимости от

скорости распространения излучения. Эта скорость равна  $v = c/\tilde{n}$ . Поэтому непостоянство  $\tilde{n}$  влечет за собой изменения величины  $v$ . Тогда выполняется соотношение  $dI = \frac{\partial I}{\partial l} dl + \frac{\partial I}{\partial t} dt + \frac{\partial I}{\partial v} dv$ . Учтем во втором его слагаемом, что имеется связь  $dt = dl/v$ . Согласно определению интенсивности (1.1.1), в третьем слагаемом требуется вычислить производную от энергии излучения по скорости  $\frac{\partial E}{\partial v}$ . Для этого следует применить механическую аналогию, считая формально излучение потоком фотонов с массой  $m$ . Тогда энергия пропорциональна  $mv^2/2$ , что дает  $\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{2E}{v}$  и, значит,  $\frac{\partial I}{\partial v} = \frac{2I}{v}$ . Теперь, учитывая  $dv = d(c/\tilde{n}) = -\frac{v}{\tilde{n}} d\tilde{n}$  и  $\frac{\partial I}{\partial l} - \frac{2I}{\tilde{n}} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial l} = \tilde{n}^2 \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{I}{\tilde{n}^2} \right)$ , получаем дифференциальное уравнение переноса излучения

$$\tilde{n}^2 \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{I}{\tilde{n}^2} \right) + \frac{\tilde{n}}{c} \frac{\partial I}{\partial t} = -\alpha I + \varepsilon. \quad (7.3.6)$$

Как условлено в разделе 1.1, в данном пособии рассматриваются только такие модели измерений, в которых можно пренебречь временными масштабами изменения сигнала по сравнению со временем регистрации прибора, то есть членом  $\frac{\tilde{n}}{c} \frac{\partial I}{\partial t}$ . Окончательно получаем дифференциальное уравнение переноса излучения с учетом рефракции в виде

$$\tilde{n}^2 \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{I}{\tilde{n}^2} \right) = -\alpha I + \varepsilon. \quad (7.3.7)$$

### **Закон ослабления при рефракции**

Рассматривая, как и в разделе 1.2, случай отсутствия собственного излучения ( $\varepsilon = 0$ ), получаем из (7.3.7)

$$I(l) = I(l_0) \frac{\tilde{n}^2(l)}{\tilde{n}^2(l_0)} P(l_0, l), \quad P(l_0, l) = \exp \left( - \int_{l_0}^l \alpha(l') dl' \right). \quad (7.3.8)$$

Интеграл в функции пропускания (7.3.8) теперь криволинейный, кроме того, к интенсивности добавился рефракционный множитель. Обычно им пренебрегают в расчетах, поскольку, как легко оценить, его влияние существенно меньше реальной приборной погрешности измерений (впрочем, для вычислений на компьютере учет этого множителя – не проблема). Тем не менее, интересно и полезно проанализировать рефракционный множитель в (7.3.8) с точки зрения его физического смысла. Он, согласно (7.3.7), показывает изменение интенсивности за счет изменения скорости света. Действительно, для трассы от верхней границы атмосферы к поверхности мы имеем  $\tilde{n}(l) > \tilde{n}(l_0)$ , т.е. усиление(!) интенсивности – скорость света с ростом  $\tilde{n}(l)$  уменьшается. Образно говоря, задние фотоны догоняют передних, поэтому интенсивность растет. Для трассы к верхней границе атмосферы все наоборот – скорость света растет, интенсивность уменьшается.

### **Практическое построение трассы рефракции и интегрирование по ней**

При практических расчетах, связанных с учетом рефракции, возникают две взаимосвязанные задачи:

1) Построение криволинейной трассы распространения излучения в атмосфере.

2) Вычисление по этой криволинейной трассе интегралов от различных заданных функций параметров атмосферы.

Как и во всех предыдущих схемах расчетов в качестве стартовой точки интегрирования будем использовать точку измерений  $(z^*, \mathcal{G}^*)$  (см. (7.3.5)). В предыдущих схемах мы также использовали в качестве узлов интегрирования уровни высотной сетки модели атмосферы  $(z_i, i=1, \dots, N)$ . Это было удобно, поскольку имелись явные аналитические выражения для вычисления оптического пути ((1.2.15), (1.2.16), (1.2.18), (7.1.8) и (7.1.11)), и это было возможно, поскольку трассы интегрирования были прямыми линиями. В случае учета рефракции оба указанных обстоятельства отсутствуют. Поэтому приходится интегрировать уже непосредственно по длине трассы, выбирая не слишком большой пространственный шаг  $\Delta l$  (стандартно – порядка десятков метров).

Для касательных трасс подынтегральная функция в формулах учета рефракции, например, (7.3.5) обращается в бесконечность в точке  $z'=h_0$  (7.3.4). Но при численном интегрировании эта проблема решается просто: 1) заменим в качестве предела интегрирования  $h_0$  на  $h_0 + \Delta r$ , взяв за  $\Delta r$  достаточно малую величину (например, 5 метров) и определив знак  $\Delta r$  в соответствии с сокращением интервала интегрирования; 2) учитывая, что в окрестности точки  $h_0$  трасса идет по касательной, просто пренебрежем ее кривизной и вычислим “исключенный” интеграл по прямой. Символически запишем этот прием в виде

$$\int_{R+z_b}^{R+h_0} f(z') dz' + \int_{R+h_0}^{R+z^*} f(z') dz' = \int_{R+z_b}^{R+h_0+\Delta r} f(z') dz' + \int_{R+h_0+\Delta r}^{R+z^*} f(z') dz' + d(h_0, \Delta r). \quad (7.3.9)$$

Заметим, что выполнено  $d(h_0, \Delta r) = 0$  при использовании соотношения (7.3.5).

После решения всех вычислительных проблем приступим непосредственно к построению трассы распространения излучения. Назовем эту процедуру “прокладкой трассы” (название себя оправдает) и будем дальше использовать этот термин без кавычек.

Пусть мы уже проложили трассу до координат  $(z_b, \mathcal{G}_b)$  (в ее начале  $z_b = z^*$ ,  $\mathcal{G}_b = \mathcal{G}^*$ ). Тогда в соответствии с (7.3.3) длина следующего ее отрезка  $\Delta l$  равна

$$\Delta l = \text{sign} \left( \mathcal{G}_b - \frac{\pi}{2} \right) \int_{z_b}^z \frac{(R+z') \tilde{n}(z')}{\sqrt{(R+z')^2 \tilde{n}^2(z') - r_b^2 \tilde{n}^2(z_b) \sin^2 \mathcal{G}_b}} dz'. \quad (7.3.10)$$

При практическом интегрировании в (7.3.10) с использованием (7.3.9) в окрестности точки  $h_0$  из прямоугольного треугольника со сторонами  $R+h_0$  и  $R+h_0+\Delta r$  имеем  $d(h_0, \Delta r) = 2\sqrt{2(R+h_0)|\Delta r|+(\Delta r)^2}$ . Выражение (7.3.10) теперь следует рассматривать как уравнение для нахождения высоты  $z$ . Его решение проводится итерационным методом, причем в качестве нулевого приближения используется значение  $z$  без учета рефракции, получаемое по (7.1.3), (7.1.5) ( $l = l_b + \Delta l$ ), а дальнейшие итерации осуществляются на основе формулы (7.3.3):

$$z_{n+1} = z_n + \text{sign} \left( \vartheta(z_n) - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\sqrt{(R+z_n)^2 \tilde{n}^2(z_n) - r_b^2 \tilde{n}^2(z_b) \sin^2 \vartheta_b}}{(R+z_n) \tilde{n}(z_n)} (\Delta l - \Delta l_n),$$

$$z_0 = \sqrt{(R+z_b)^2 - 2(R+z_b) \Delta l \cos \vartheta_b + (\Delta l)^2} - R. \quad (7.3.11)$$

В (7.3.11) угол  $\vartheta(z_n)$  вычисляется по (7.3.2) ( $\sin \vartheta(z_n) = \frac{r_b \tilde{n}(z_b)}{(R+z_n) \tilde{n}(z_n)} \sin \vartheta_b$ ), а  $\Delta l_n$  рассчитывается по (7.3.10) при  $z = z_n$  (обычно в интеграле (7.3.10) только два узла, если точки  $z_b$  и  $z_n$  лежат внутри одного высотного слоя, или три узла – если в соседних слоях, но итерации все равно необходимы в силу нелинейности зависимости в (7.3.10)). Критерий окончания итераций применяется стандартный: по близости  $z_{n+1}$  и  $z_n$  (например, менее метра). После определения высоты  $z$  из (7.3.11) зенитный угол сразу находится по формуле (7.3.2)

$$\sin \vartheta(z) = \frac{r_b \tilde{n}(z_b)}{(R+z) \tilde{n}(z)} \sin \vartheta_b. \quad (7.3.12)$$

Напомним, все геометрические вычисления для сферической атмосферы, тем более, с учетом рефракции, необходимо выполнять с двойной компьютерной точностью.

Дальнейшее элементарно. Вычисляем для высот  $z_b$  и  $z$  необходимые параметры атмосферы (например, объемный коэффициент ослабления излучения при расчете функции пропускания) и суммируем в квадратурной формуле трапеций вида (1.2.9) указанные узлы с геометрической длиной между ними  $\Delta l$ . Затем присваиваем  $z_b = z$ ,  $\vartheta_b = \vartheta(z)$  и переходим к прокладке следующего отрезка трассы длиной  $\Delta l$  согласно (3.7.10)-(3.7.12). Прокладка трассы стандартно заканчивается при достижении границы атмосферы (верхней или нижней).

В принципе может еще понадобится пересчет остальных координат для точки  $z$  по формулам Приложения 12. Тогда следует найти такой косинус зенитного угла, чтобы прямая длиной  $\Delta l$ , выходящая из  $z_b$ , достигла высоты  $z$ . С учетом  $l = l_b + \Delta l$  можно сразу выразить искомый косинус из второго соотношения (7.3.11)

$$\cos \vartheta_b(\Delta l) = -\frac{(R+z)^2 - (R+z_b)^2 - (\Delta l)^2}{2(R+z_b) \Delta l}. \quad (7.3.13)$$

Соотношение (7.3.13) определяет тот начальный косинус зенитного угла в точке  $z_b$ , который следует использовать для пересчета координат трассы (за исключением высоты и зенитного угла) в ее новой точке.

### Рефракция для прямого излучения

Для прямого излучения, как отмечалось выше, самой важной характеристикой является угол рефракции (7.3.5). Для его вычисления трассу следует прокладывать от источника (стандартно – от верхней границы атмосферы). При необходимости на этой трассе вычисляется функция пропускания, для которой в конце трассы можно даже учесть и рефракционный множитель (7.3.8).

Заметим, что реальной переменной интегрирования в (7.3.5) является не высота, а  $\ln \tilde{n}(z)$ , т.е. при прокладке трассы в весах интегрирования надо брать

не  $\Delta l$ , а разность логарифмов. Если учесть, что  $\ln(1+x) \approx x$  при малых  $x$ , то достаточно брать разность самих показателей преломления.

### **Рефракция для теплового излучения**

Поскольку формальное выражение для функции пропускания (7.3.8) не изменилось по сравнению со сферическим случаем (см. раздел 7.1), для теплового излучения можно использовать тот же прием: интегрировать не по высоте, а по функции пропускания (раздел 1.3). То есть при прокладке трассы брать в качестве веса интегрирования не  $\Delta l$ , а разность общей функции пропускания в точках  $z_b$  и  $z$  (общей – в смысле – вычисленной от стартовой точки трассы). Здесь остаются в силе все вычислительные приемы, описанные в разделе 1.3 и Приложении 3. Единственное, от чего придется отказаться, это дробление высотных слоев (точность интегрирования теперь определяется заданием  $\Delta l$ ), впрочем, это только упростит логику алгоритма. При вычислении функции Планка в точках трассы можно, при желании, умножать ее на рефракционный множитель (7.3.8)  $\tilde{n}^2(z^*)/\tilde{n}^2(z)$  (объясните, почему именно такое отношение, а не обратное).

Если трасса достигает поверхности, то учитывается ее тепловое излучение умножением на функцию пропускания, которая уже получена при прокладке трассы (см. раздел 1.5). Для отражения теплового излучения от поверхности учет рефракции вряд ли уместен. Хотя для идеального зеркального отражения в строгой постановке задачи он возможен, но для этого придется прокладывать трассу к верхней границе атмосферы с соответствующим зенитным углом отражения, вычислять для нее интенсивность, а затем умножать на коэффициент отражения и функцию пропускания первой трассы.

### **Рефракция и рассеяние излучения**

Принято считать, что влияние рефракции на поле рассеянного излучения пренебрежимо мало. Этот вывод подтверждается теоретическими и расчетными оценками, а также простыми физическими рассуждениями: рефракция существенна лишь для трасс, идущих под очень малыми углами к горизонту, и поэтому, в силу их больших оптических длин, рассеянное излучение проходит минимальное расстояние, не успев сильно “искривиться”, и уходит после следующего рассеяния в другие направления. Тем не менее, как в учебных целях - для закрепления пройденного материала, так и в прикладных - для анализа потенциального влияния рефракции в практических вычислительных задачах, полезно дать обзор возможностей учета рефракции при расчетах полей рассеянного излучения.

Для приближения (7.2.1) с вычислением функции источников в плоской геометрии и интегрировании ее по сферическим трассам учет рефракции трудностей не вызывает. Достаточно просто прокладывать трассу от точки измерений и вычислять по ней интеграл (7.2.1). Отметим еще раз, как поразительный факт, уникальные возможности “плоского” приближения (7.2.1).

Для приближения однократного рассеяния (7.2.3) ситуация оказывается существенно сложнее. Здесь при прокладке трассы от точки измерений (трасса рассеянного излучения) придется, как было описано выше, для каждого узла интегрирования прокладывать еще и трассу к верхней границе атмосферы (трасса прямого излучения) под углом, пересчитываемым для косинуса зенитного угла Солнца. При этом все углы и азимуты при прокладке трасс интегрирования также непрерывно пересчитываются, а угол рассеяния перестает быть константой. Теряют свой смысл и пределы интегрирования в

(7.2.3). Теперь из-за искривления трасс, следует индивидуально выбирать только те трассы прямого излучения, которые достигают верхней границы атмосферы (там для них  $\eta_0 \geq 0$ ), а вклад в интеграл остальных трасс будет равен нулю. Конечно, можно использовать различные упрощения и приближения, но они в задачах рассеяния очевидны, поэтому мы не будем на них останавливаться.

Из всех методов расчета многократно рассеянного излучения строгий учет рефракции возможен только для ММК. Здесь модификации алгоритма раздела 7.2 очевидны. Надо прокладывать трассу до границы атмосферы (7-ая операция алгоритма), на ней вычислять оптический путь и уже по нему разыгрывать свободный пробег. С определением нового положения фотона после пробега (8-ая операция) тоже возникают некоторые проблемы, но их несложно решить, комбинируя метод для прямой трассы (см. Приложение 12) и алгоритм нахождения высоты (7.3.11). Для ПЛО (7.2.18)-(7.2.19) также следует выполнять прокладку трасс к верхней границе атмосферы с вычислением по ним оптического пути (и проверке условия  $\eta_0 > 0$ ).

### **Рефракция и поляризация**

Учет рефракции для поляризованного излучения не порождает новых проблем, поскольку в слоисто-однородной атмосфере искривление трасс распространения излучения не затрагивает азимутальных зависимостей. Таким образом, все рассуждения разделов 7.1 и 7.2 о поляризации в сферической атмосфере остаются в силе.

### **Приближение рефракционного удлинения прямой трассы**

В заключение этого непростого раздела рассмотрим совершенно простой приближенный способ учета атмосферной рефракции. Одним из следствий рефракции является удлинение трассы распространения излучения. Действительно, как следует из формулы (7.3.3), отношение дифференциалов длины трассы в случае наличия и отсутствия рефракции равно

$$\delta(z) = \tilde{n}(z) \frac{\sqrt{(R+z)^2 - r_b^2 \sin^2 \vartheta_b}}{\sqrt{(R+z)^2 \tilde{n}^2(z) - r_b^2 \tilde{n}^2(z_b) \sin^2 \vartheta_b}}. \quad (7.3.14)$$

Это соотношение может быть востребовано для приближенного учета рефракции в задачах, где нас не интересует собственно геометрическая трасса распространения излучения. Тогда можно моделировать ее прямой линией с использованием соотношений раздела 7.1 и Приложения 12, но дополнительно умножать геометрическую длину (которая является аргументом при вычислении интегралов) на множитель (7.3.14).

## **7.4. Оптика моря**

### **Взаимодействие солнечного излучения с водной средой**

До сих пор мы рассматривали задачи переноса излучения в атмосфере, полагая подстилающую поверхность лишь источником отраженного и/или собственного излучения. Однако существует особая поверхность, от которой излучение не просто отражается. Водная поверхность в видимом диапазоне спектра пропускает солнечное излучение на значительную глубину. Поэтому происходит перенос его внутри водной толщи, при этом часть излучения там рассеивается, вновь достигает поверхности и проникает через нее обратно в атмосферу. Таким образом, взаимодействие солнечного излучения с водной

средой осуществляется более сложным путем, чем отражение, имеет место взаимное проникновение излучения из одной среды в другую через границу раздела – поверхность воды. Учитывая, что, во-первых, водная поверхность занимает 71% поверхности нашей планеты [1,2], и, во-вторых, на видимый диапазон спектра приходится максимум энергии излучения Солнца, задача точного учета оптического взаимодействия атмосферы и водных бассейнов Земли весьма важна. Традиционно соответствующий раздел прикладной оптики и теории переноса излучения именуют “оптика моря”.

### **Задачи оптики моря**

Из вышеизложенных особенностей взаимодействия излучения с водной средой вытекают три основных задачи, рассматриваемые в оптике моря:

- 1) адекватное описание отражения излучения от водной поверхности и проникновения излучения из нее в атмосферу;
- 2) описание переноса излучения внутри водной среды;
- 3) учет процессов взаимопроникновения излучения из атмосферы в водную среду и обратно.

Рассмотрим эти задачи в указанном порядке с прикладной, вычислительной точки зрения. Напомним, что речь идет только о солнечном излучении в видимом диапазоне спектра.

### **Зеркальное и диффузное отражение**

В качестве простейшей модели отражения от водной поверхности может быть использовано идеальное зеркальное отражение, учет которого во всех численных методах мы рассматривали на протяжении всего пособия. Однако, эта модель не учитывает долю излучения, выходящего из воды в воздух. Простая идея такого учета состоит в интерпретации выходящего излучения в виде дополнительного отражения, но уже не зеркального, а диффузного, т.е. направленного во все стороны. Таким образом, для двунаправленного коэффициента отражения от водной поверхности (2.4.1) можно записать

$$r(\eta, \eta', \varphi - \varphi') = r_m(\eta, \eta', \varphi - \varphi') + r_d(\eta, \eta', \varphi - \varphi'), \quad (7.4.1)$$

где  $(\eta', \varphi')$  – направление падающего на поверхность излучения,  $(\eta, \varphi)$  – направление отраженного излучения;  $r_m(\eta, \eta', \varphi - \varphi')$  – составляющая зеркального (“истинного”) отражения;  $r_d(\eta, \eta', \varphi - \varphi')$  – составляющая диффузного отражения, аппроксимирующая выходящее из воды излучение. В (7.4.1) и далее мы, для удобства, сразу перейдем к косинусам зенитных углов, причем  $\eta' > 0$  и  $\eta < 0$ .

Как уже отмечено, простейшей моделью зеркальной составляющей является идеальное зеркальное отражение

$$r_m(-\eta, \eta', \varphi - \varphi') = r(\eta) \delta(|\eta| - \eta') \delta(\varphi - \varphi'), \quad (7.4.2)$$

где  $r(\eta)$  – коэффициент отражения (1.4.6),  $\delta()$  – дельта-функция, которая формально необходима, чтобы гарантировать равенство углов и азимутов падения и отражения, и которая на практике вместо вычисления интегралов вида (2.4.20) приводит к вычислению подинтегральной функции в одной точке (см. разделы 2.4 и 2.5).

Для диффузного отражения в качестве простейшей модели естественно использовать идеальное изотропное отражение

$$r_d(\eta, \eta', \varphi - \varphi') = \frac{A}{\pi} \eta'. \quad (7.4.3)$$



Как мы ранее договаривались, конкретные параметры атмосферы и поверхности (в данном случае значение  $A$ ) считаются заданными (обычно значения  $A$  составляют порядка нескольких процентов).

При учете поляризации излучения коэффициент  $r(\eta)$  в (7.4.2) превращается в матрицу отражения (6.2.6), а альbedo  $A$  в (7.4.3) в диагональную матрицу согласно (6.2.5).

В вычислительных методах, рассматривающих отражение как единичный акт, можно отдельно учесть зеркальное и диффузное отражения, как, например, в методе последовательных порядков рассеяния (см. раздел 2.5). Однако, МПР не является эффективным для солнечного излучения. В методе Монте-Карло (ММК) при расчете полусферических потоков, учитывая, что для идеального зеркального отражения альbedo равно  $r(\eta)$ , удобно разыгрывать тип отражения по вероятности зеркального и диффузного отражения ( $r(\eta)/(r(\eta)+A)$  и  $A/(r(\eta)+A)$ , соответственно) с последующим моделированием каждого типа по отдельности. При вычислении интенсивностей по ММК следует использовать ПЛО вида (4.4.4) для зеркального отражения, а при попадании фотона на поверхность и пересчете его веса еще раз применить ПЛО уже для диффузного отражения (4.4.3).

#### **Задача моделирования взволнованной водной поверхности**

Разумеется, идеальное зеркальное отражение (7.4.2) не адекватно описывает водную поверхность, поскольку на ней практически всегда присутствуют волны. Для учета волнения применяется следующий очевидный прием: поверхность представляется как совокупность элементарных плоских площадок; отражение излучения от каждой такой площадки моделируется по законам идеального зеркального отражения; общее отраженное излучение получается как сумма по всем элементарным площадкам.

Для водной поверхности возможны два типа подобных моделей: динамические и статистические. В динамических моделях положение элементарных площадок является функцией времени. Это означает, что в каждый момент времени отражение происходит от конкретно ориентированной элементарной площадки. В плане моделирования измерений динамические модели позволяют, например, воспроизводить блики, т.е. мерцания отраженного источника излучения при взгляде на воду. Однако обычно нас интересует картина отражения, усредненная по времени и/или пространству. Действительно, для задач энергетики атмосферы необходимо усреднение по достаточно продолжительному промежутку времени, а в задачах дистанционного зондирования приборы имеют определенное, обычно немалое, пространственное разрешение, т.е. накапливают сигнал с достаточно большого участка водной поверхности с различно ориентированными элементарными площадками. Для таких случаев используют статистические модели поверхности, где положение элементарных площадок характеризуется плотностью вероятности.

#### **Функция плотности вероятности для описания ориентации элементарных площадок**

Как всегда для атмосферно-оптических задач, используем в качестве направления отсчета углов вертикальную ось. Тогда элементарная площадка взволнованной водной поверхности будет определяться своей нормалью  $(\vartheta_n, \varphi_n)$ , где  $\vartheta_n$  – надирный угол нормали,  $\varphi_n$  – ее азимут. Для статистической модели взволнованной водной поверхности теперь достаточно задать лишь

функцию плотности вероятности ориентации элементарных площадок  $P(\mathcal{G}_n, \varphi_n)$ . Очевидно, что  $P(\mathcal{G}_n, \varphi_n)$  должна включать в качестве параметров скорость ветра  $v$  (в м/с у поверхности воды) и направление ветра, т.е. его азимут  $\varphi_v$ .

Стандартно используемой функцией  $P(\mathcal{G}_n, \varphi_n)$  является функция Кокса и Манка. Она имеет для оптики моря такое же значение, что и индикатриса Хенни-Гринштейна (2.2.20) для оптики атмосферы, а ее представление имеет следующий вид:

$$P(\mathcal{G}_n, \varphi_n) = \frac{\exp(-(x^2 + y^2)/2)}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \times \left( 1 - \frac{1}{2}c_{21}(x^2 - 1)y - \frac{1}{6}c_{03}(y^3 - 3y) + 0.017(x^4 - 6x^2 + 3) + 0.03(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 0.01Y \right),$$

$$x = z_x / \sigma_x, \quad z_x = \sin(\varphi_n - \varphi_v) \operatorname{tg} \mathcal{G}_n, \quad \sigma_x = \sqrt{0.003 + 1.92 \cdot 10^{-3}v},$$

$$y = z_y / \sigma_y, \quad z_y = \cos(\varphi_n - \varphi_v) \operatorname{tg} \mathcal{G}_n, \quad \sigma_y = \sqrt{3.16 \cdot 10^{-3}v},$$

$$c_{21} = 0.01 - 0.0086v, \quad c_{03} = 0.04 - 0.033v, \quad Y = (y^4 - 6y^2 + 3). \quad (7.4.4)$$

Функция Кокса и Манка (7.4.4) была получена аппроксимацией натуральных измерений наклонов морских волн: она имеет несколько громоздкий вид, но смысл ее простой – это двумерное нормальное распределение с поправками, более точно учитывающими реальные измерения (слагаемые, на которые экспонента умножается). Понятно, что при реализации на компьютере выражение (7.4.4) не вызывает затруднений, хотя иногда используют приближение только нормальной аппроксимации – экспоненту в (7.4.4).

#### Определение ориентации элементарной площадки

Вернемся к двунаправленному коэффициенту зеркального отражения в (7.4.1). Теперь для его построения надо решить геометрическую задачу: как должна быть ориентирована элементарная площадка, чтобы для направления падающего излучения  $(\eta', \varphi')$  при учете законов идеального зеркального отражения получить направление отраженного излучения  $(\eta, \varphi)$ . Для удобства работы с положительными косинусами здесь заменим  $\eta$  на  $-\eta$ .

Записывая косинус угла падения  $\psi$  как угол между направлениями  $(\eta', \varphi')$  и  $(\mathcal{G}_n, \varphi_n)$ , имеем

$$\psi = \eta' \cos \mathcal{G}_n + \sqrt{1 - (\eta')^2} \sin \mathcal{G}_n \cos(\varphi' - \varphi_n). \quad (7.4.5)$$

Из равенства углов отражения и падения получаем первое уравнение

$$\eta' \cos \mathcal{G}_n + \sqrt{1 - (\eta')^2} \sin \mathcal{G}_n \cos(\varphi' - \varphi_n) = \eta \cos \mathcal{G}_n + \sqrt{1 - \eta^2} \sin \mathcal{G}_n \cos(\varphi - \varphi_n). \quad (7.4.6)$$

Т.к. падающий и отраженный лучи, а также нормаль к поверхности лежат в

одной плоскости, получаем второе уравнение  $\begin{vmatrix} x_n & y_n & z_n \\ x' & y' & z' \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$ , где в

определителе стоят декартовы координаты рассматриваемых направлений. Расписав определитель в явном виде, получаем

$$\begin{aligned}
& \sin \mathcal{G}_n \sin \varphi_n (\eta \sqrt{1 - (\eta')^2} \cos \varphi' - \eta' \sqrt{1 - \eta^2} \cos \varphi) + \\
& + \sin \mathcal{G}_n \cos \varphi_n (\eta' \sqrt{1 - \eta^2} \sin \varphi - \eta \sqrt{1 - (\eta')^2} \sin \varphi') - \\
& - \cos \mathcal{G}_n \sqrt{(1 - \eta^2)(1 - (\eta')^2)} \sin(\varphi' - \varphi) = 0,
\end{aligned} \tag{7.4.7}$$

а из уравнения (7.4.6) имеем

$$\operatorname{tg} \mathcal{G}_n = \frac{\eta - \eta'}{\sqrt{1 - (\eta')^2} \cos(\varphi' - \varphi_n) - \sqrt{1 - \eta^2} \cos(\varphi - \varphi_n)}. \tag{7.4.8}$$

После деления уравнения (7.4.7) на  $\cos \mathcal{G}_n$ , перехода к тангенсу угла, выражения его из (7.4.7) и подстановки в (7.4.8) в результате получаем

$$\operatorname{tg} \varphi_n = u/w,$$

$$\begin{aligned}
u &= (\eta' - \eta)(\eta' \sqrt{1 - \eta^2} \sin \varphi - \eta \sqrt{1 - (\eta')^2} \sin \varphi') - \\
& - \sqrt{(1 - \eta^2)(1 - (\eta')^2)} \sin(\varphi' - \varphi)(\sqrt{1 - (\eta')^2} \cos \varphi' - \sqrt{1 - \eta^2} \cos \varphi), \\
w &= (\eta - \eta')(\eta \sqrt{1 - (\eta')^2} \cos \varphi' - \eta' \sqrt{1 - \eta^2} \cos \varphi) + \\
& + \sqrt{(1 - \eta^2)(1 - (\eta')^2)} \sin(\varphi' - \varphi)(\sqrt{1 - (\eta')^2} \sin \varphi' - \sqrt{1 - \eta^2} \sin \varphi).
\end{aligned} \tag{7.4.9}$$

Таким образом, последовательное применение формул (7.4.8)-(7.4.9) решает задачу о нахождении ориентации нормали к поверхности  $(\mathcal{G}_n, \varphi_n)$  при отражении из направления  $(\eta', \varphi')$  в направление  $(-\eta, \varphi)$ .

#### Модель отражения от взволнованной водной поверхности

Теперь, казалось бы, можно записать двунаправленный коэффициент отражения в виде  $r_m(-\eta, \eta', \varphi - \varphi') = P(\mathcal{G}_n, \varphi_n) r(\psi)$ . Однако возникает еще один тонкий момент. Не для элементарной площадки, а уже для всей поверхности мы имеем отражение под косинусом угла  $|\eta|$  при косинусе угла падения  $\eta'$ . Допустим, что поверхность отражает все излучение. Но тогда по закону сохранения энергии должно соблюдаться равенство потоков  $I^\downarrow \eta' = I^\uparrow |\eta|$ . Для идеального зеркального отражения интенсивности будут равны  $I^\uparrow = I^\downarrow$ . Отсюда, чтобы обеспечить соблюдение закона сохранения энергии, мы обязаны ввести в модель отражения пересчетные геометрические множители:

$$r_m(-\eta, \eta', \varphi - \varphi') = \frac{|\eta|}{\eta'} P(\mathcal{G}_n, \varphi_n) r(\psi). \text{ Этот же вывод можно сделать и на основе}$$

исходного определения интенсивности (1.1.1). Прodelайте это в качестве упражнения и объясните, почему мы учитываем эту особенность отражения именно в этом разделе, но нигде ранее.

Помимо различной ориентации элементарных площадок, для адекватного описания взволнованной водной поверхности следует еще учесть и пену, возникающую при волнении. Это стандартно делают добавлением специальной компоненты отражения от пены, которую задают идеально изотропной. Таким образом, окончательно двунаправленный коэффициент зеркального отражения (который при наличии пены не совсем зеркальный, но продолжаем этот термин использовать) от водной поверхности имеет вид

$$r_m(-\eta, \eta', \varphi - \varphi') = (1 - b) \frac{|\eta|}{\eta'} P(\mathcal{G}_n, \varphi_n) r(\psi) + b \frac{a}{\pi} \eta', \tag{7.4.10}$$

где  $(\mathcal{G}_n, \varphi_n)$  вычисляются по (7.4.8)-(7.4.9);  $\psi$  – по (7.4.5);  $P(\mathcal{G}_n, \varphi_n)$  – по (7.4.4);  $r(\psi)$  – по (1.4.6);  $b$  – доля покрытия поверхности пеной, зависящая от скорости ветра (соответствующие данные имеются в литературе);  $a$  – альбедо пены.

Модель отражения (7.4.10) в качестве составной части (7.4.1) может быть использована во всех описанных в пособии численных методах (при необходимости разложения по азимутальным гармоникам следует использовать табличное представление). Для учета поляризации достаточно, во-первых, заменить  $r(\psi)$  матрицей отражения, а  $a$  – диагональной матрицей, во-вторых, пересчитать поляризационные базисы точно так же, как в разделе 6.3, т.е. по формулам (6.3.5)-(6.3.9). Таким образом, для поляризованного излучения модель (7.4.10) примет вид

$$\mathbf{R}_m(-\eta, \eta', \varphi - \varphi') = (1-b) \frac{|\eta|}{\eta'} P(\mathcal{G}_n, \varphi_n) \mathbf{M}(\beta) \mathbf{R}(\psi) \mathbf{M}(\beta') + b \frac{a}{\pi} \mathbf{1} \eta', \quad (7.4.11)$$

где  $\mathbf{M}(\beta)$  и  $\mathbf{M}(\beta')$  – матрицы вращения (6.1.20);  $\mathbf{R}(\psi)$  – матрица идеального зеркального отражения (6.2.6);  $\mathbf{1}$  – единичная матрица.

#### Проникновение излучения в воду

Рассмотрим теперь второй процесс – проникновение излучения из атмосферы в воду. Начнем, естественно, с простейшей – идеальной зеркальной (не взволнованной) модели и при этом заметим, что в (7.4.1) член диффузного отражения теперь учету не подлежит. Некоторые проблемы возникают при наличии пены (7.4.10)-(7.4.11), поскольку она тоже пропускает излучение, но мы не будем в рамках учебного пособия учитывать такие тонкости моделирования.

Пусть излучение падает на водную поверхность из направления  $(\eta', \varphi')$  и проникает в нее в направлении  $(\eta, \varphi)$  (возможна некоторая путаница в обозначениях для отраженного и прошедшего излучений, но, на самом деле, сохранение для них единых координат очень удобно на практике). По закону преломления имеем

$$\sqrt{1-\eta^2} = \frac{1}{\tilde{m}} \sqrt{1-(\eta')^2} \quad (7.4.12)$$

или

$$\eta = \frac{1}{\tilde{m}} \sqrt{\tilde{m}^2 - 1 + (\eta')^2}. \quad (7.4.13)$$

Для показателя преломления воды мы в (7.4.13) в целях согласования со случаем отражения, использовали общее обозначение  $\tilde{m}$ , хотя реально его всегда считают вещественным (иначе угол преломления станет комплексным). Показатель преломления воздуха в оптике моря считается равным единице.

Соответствующая матрица, которая называется матрицей пропускания из воздуха в воду, определяется по (6.1.22)-(6.1.23) формулами Френеля, аналогичными (6.2.6):

$$S_1 = \frac{2\eta'}{\eta' + \sqrt{\tilde{m}^2 - 1 + (\eta')^2}}, \quad S_4 = \frac{2\tilde{m}\eta'}{\tilde{m}^2\eta' + \sqrt{\tilde{m}^2 - 1 + (\eta')^2}}. \quad (7.4.14)$$

Для коэффициента пропускания, выражающего соотношения интенсивностей падающего и прошедшего излучения, из (7.4.14) получаем

$$t(\eta') = \frac{1}{2} \left( \left| \frac{2\eta'}{\eta' + \sqrt{\tilde{m}^2 - 1 + (\eta')^2}} \right|^2 + \left| \frac{2\tilde{m}\eta'}{\tilde{m}^2\eta' + \sqrt{\tilde{m}^2 - 1 + (\eta')^2}} \right|^2 \right). \quad (7.4.15)$$

При учете взволнованной границы раздела принципиально новых проблем не возникает. По-прежнему, необходимо найти ориентацию нормали к поверхности  $(\mathcal{G}_n, \varphi_n)$  для прошедшего в воду излучения из направления  $(\eta', \varphi')$  в направление  $(\eta, \varphi)$ . Косинус угла падения определится соотношением (7.4.5). Вся разница теперь в том, что вместо соотношения (7.4.6) имеем, согласно (7.4.13) и с учетом того, что угол преломления – это отклонение от надира, первое уравнение в виде

$$\begin{aligned} \tilde{m}^2 (-\eta \cos \mathcal{G}_n + \sqrt{1 - \eta^2} \sin \mathcal{G}_n \cos(\varphi - \varphi_n))^2 = \\ = \tilde{m}^2 - 1 + (\eta' \cos \mathcal{G}_n + \sqrt{1 - (\eta')^2} \sin \mathcal{G}_n \cos(\varphi - \varphi_n))^2. \end{aligned} \quad (7.4.16)$$

Выражая тригонометрические функции в (7.4.16) через  $\text{tg} \mathcal{G}_n$ , получаем квадратное уравнение

$$\begin{aligned} a \text{tg}^2 \mathcal{G}_n + b \text{tg} \mathcal{G}_n + c = 0; \\ a = a_1 \cos^2 \varphi_n + a_2 \sin \varphi_n \cos \varphi_n + a_3, \\ a_1 = a_0 \cos 2\varphi, \quad a_2 = a_0 \sin 2\varphi, \quad a_3 = a_0 \sin^2 \varphi + 1 - \tilde{m}^2, \\ a_0 = \tilde{m}^2 (1 - \eta^2) - 1 + (\eta')^2; \\ b = b_1 \cos \varphi_n + b_2 \sin \varphi_n, \\ b_1 = b_0 \cos \varphi, \quad b_2 = b_0 \sin \varphi, \quad b_0 = -2(\tilde{m}^2 \eta \sqrt{1 - \eta^2} + \eta' \sqrt{1 - (\eta')^2}); \\ c = -a_0. \end{aligned} \quad (7.4.17)$$

Как обычно, рекомендуем читателю воспроизводить вывод всех формул. Так же, как и в случае отражения, далее выражаем  $\text{tg} \mathcal{G}_n$  из (7.4.7):

$$\begin{aligned} \text{tg} \mathcal{G}_n = \frac{d_3}{d_1 \sin \varphi_n + d_2 \cos \varphi_n}, \\ d_1 = \eta \sqrt{1 - (\eta')^2} \cos \varphi' - \eta' \sqrt{1 - \eta^2} \cos \varphi, \\ d_2 = \eta' \sqrt{1 - \eta^2} \sin \varphi - \eta \sqrt{1 - (\eta')^2} \sin \varphi', \\ d_3 = \sqrt{(1 - \eta^2)(1 - (\eta')^2)} \sin(\varphi' - \varphi), \end{aligned} \quad (7.4.18)$$

после чего подставляем (7.4.18) в (7.4.17) и выражаем уже функции угла  $\varphi_n$  через  $\text{tg} \varphi_n$ . В результате получаем квадратное уравнение

$$\begin{aligned} a \text{tg}^2 \varphi_n + b \text{tg} \varphi_n + c = 0, \\ a = a_3 d_3^2 + b_2 d_1 d_3 - a_0 d_1^2, \\ b = a_2 d_3^2 + d_3 (b_1 d_1 + b_2 d_2) - 2a_0 d_1 d_2, \\ c = d_3^2 (a_1 + a_3) + b_1 d_2 d_3 - a_0 d_2^2. \end{aligned} \quad (7.4.19)$$

Возможно, что при подстановке в (7.4.19) конкретных выражений из (7.4.17)-(7.4.18) возникнут упрощения, но их поиск излишен, т.к. подстановки могут увеличить вероятность ошибки в процессе программирования.

В полной аналогии с моделью отражения (7.4.10) модель пропускания излучения из воздуха в воду теперь записывается в виде

$$t_m(\eta, \eta', \varphi - \varphi') = \frac{\eta}{\eta'} P(\mathcal{G}_n, \varphi_n) t(\psi), \quad (7.4.20)$$

где  $(\mathcal{G}_n, \varphi_n)$  вычисляются по (7.4.18)-(7.4.19), а  $\psi$  – по (7.4.5). Заметим, что физически осмысленные решения для углов  $(\mathcal{G}_n, \varphi_n)$  при пропускании уже не гарантируются для любых пар направлений  $(\eta', \varphi')$  и  $(\eta, \varphi)$ : в случае отсутствия решений имеем  $t_m(\eta, \eta', \varphi - \varphi') = 0$ .

Для поляризованного излучения (7.4.20) переходит в векторную форму

$$\mathbf{T}_m(\eta, \eta', \varphi - \varphi') = \frac{|\eta|}{\eta'} P(\mathcal{G}_n, \varphi_n) \mathbf{M}(\beta) \mathbf{T}(\psi) \mathbf{M}(\beta'), \quad (7.4.21)$$

где  $\mathbf{T}_m(\eta, \eta', \varphi - \varphi')$  – матрица пропускания,  $\mathbf{T}(\psi)$  – матрица для идеальной поверхности на основе (7.4.14) (при  $\eta' = \psi$ ), углы вращения  $\beta$  и  $\beta'$  в (6.1.20) вычисляются по (6.3.5)-(6.3.9).

### Перенос излучения в водной среде

Если не рассматривать все же достаточно экзотические задачи определения полей излучения в воде, то главной целью учета проникновения излучения в воду становится вычисление его доли, выходящей из воды обратно в атмосферу. Таким образом, задачу можно сформулировать как определение интенсивности (вектора Стокса) выходящего из воды излучения при заданной интенсивности, прошедшей в воду, которая выражается следующим образом

$$\begin{aligned} I_m^\downarrow(\eta, \varphi) &= \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 t_m(\eta, \eta', \varphi - \varphi') I_a^\downarrow(\eta, \eta', \varphi') d\eta' \\ \mathbf{L}_m^\downarrow(\eta, \varphi) &= \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \mathbf{T}_m(\eta, \eta', \varphi - \varphi') \mathbf{L}_a^\downarrow(\eta, \eta', \varphi') d\eta', \end{aligned} \quad (7.4.22)$$

где  $I_a^\downarrow(\eta, \eta', \varphi')$  – интенсивность (вектор Стокса  $\mathbf{L}_a^\downarrow(\eta, \eta', \varphi')$ ) нисходящего излучения на нижней границе атмосферы.

Для расчета переноса излучения в воде, в принципе, можно использовать любые численные методы (оптические параметры воды считаются заданными). В первом приближении интенсивность прошедшего в воду излучения задается для прямого солнечного излучения и идеальной зеркальной поверхности. Однако уже наличие волнения делает такой подход невозможным. Поэтому сразу рассмотрим наличие диффузного излучения на верхней границе водной среды (7.4.22). Здесь наиболее подходящим является метод сложения слоев (см. разделы 3.4 и 6.5), поскольку он изначально настроен именно на диффузное освещение. Также эффективным оказывается ММК, но о нем поговорим чуть ниже.

При моделировании переноса излучения в воде возникают две новые проблемы. Во-первых, отражение теперь происходит не на нижней, а на верхней границе среды (от воздуха). Соответствующую модель легко получить из (7.4.10)-(7.4.11) просто формальной заменой зенитных углов надирными и наоборот (с точки зрения математики такая замена вообще ничего не изменит). Для матрицы отражения надо заменить показатель преломления воды  $\tilde{m}$  на  $1/\tilde{m}$ . Далее учет отражения в МСС осуществляется стандартными итерациями (см. раздел 6.5). (Перепишите соответствующие формулы и алгоритмы для отражения от верхней границы среды.) Во-вторых, обычно водная среда рассматривается как оптически полубесконечная, т.е. влияние отражения от дна для достаточно глубоких водоемов не учитывается. Укажем, что существуют

приближенные методы решения задач переноса излучения в полубесконечных средах, но эта тематика уже выходит за рамки нашего учебного пособия. Впрочем, при практическом применении МСС проблема полубесконечной среды решается достаточно просто: поскольку мы складываем слои от верхней, освещенной границы, то это сложение достаточно оборвать, как только влияние прибавляемого слоя на интенсивность на указанной границе станет меньше заданной погрешности.

После нахождения интенсивности на верхней границе водной среды, для получения интересующей нас интенсивности, выходящей из воды в воздух, достаточно применить оператор пропускания вида (7.4.20)-(7.4.21), в котором вновь нужно поменять зенитные углы на надирные, а  $\tilde{m}$  заменить на  $1/\tilde{m}$ . В итоге имеем для искомой интенсивности (вектора Стокса) выражения

$$\begin{aligned} I_a^\uparrow(\eta, \varphi) &= \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \tilde{t}_m(-\eta, -\eta', \varphi - \varphi') I_m^\uparrow(\eta, \eta', \varphi') d\eta' \\ \mathbf{L}_a^\uparrow(\eta, \varphi) &= \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \tilde{\mathbf{T}}_m(-\eta, -\eta', \varphi - \varphi') \mathbf{L}_m^\uparrow(\eta, \eta', \varphi') d\eta', \end{aligned} \quad (7.4.23)$$

где  $I_m^\uparrow(\eta, \eta', \varphi')$  – интенсивность (вектор Стокса  $\mathbf{L}_m^\uparrow(\eta, \eta', \varphi')$ ) выходящего из водной среды излучения на ее верхней границе,  $\tilde{t}_m(-\eta, -\eta', \varphi - \varphi')$  и  $\tilde{\mathbf{T}}_m(-\eta, -\eta', \varphi - \varphi')$  – операторы пропускания из воды в воздух.

#### Перенос излучения в двухслойной среде “атмосфера-море”

Как ясно из вышеизложенного, рассмотрение переноса излучения отдельно в атмосфере и водной среде неизбежно чревато приближениями. В строгой постановке необходимо рассматривать указанную задачу переноса для единой двухслойной среды “атмосфера-море”, освещенной Солнцем на верхней границе атмосферы. Подобная задача ставилась и решалась уже достаточно давно, а ресурсы современных компьютеров делают такое строгое рассмотрение все более возможным и привлекательным. Приведем сначала общую формальную схему решения этой задачи, а потом остановимся на некоторых конкретных особенностях. Чтобы не повторяться, будем сразу рассматривать поляризованное излучение, полагая, что случай без учета поляризации станет для читателя очевидным.

Математический формализм удобнее всего строить на основе схемы МСС (см. раздел 6.5). Итак, достаточно иметь:

1) способ определения вектора Стокса в атмосфере с учетом отражения от поверхности (7.4.10), (7.4.11), в частности на ее нижней границе, при освещении атмосферы сверху с вектором  $\mathbf{L}_0(\eta_0, \varphi_0)$ , т.е.

$$\mathbf{L}_a^\downarrow(\eta, \varphi) = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \mathbf{T}_a(\eta, \eta', \varphi, \varphi') \mathbf{L}_0(\eta', \varphi') d\eta', \quad (7.4.24)$$

где  $\mathbf{T}_a(\eta, \eta', \varphi, \varphi')$  – запись соответствующего метода в виде формального оператора;

2) способ определения вектора Стокса в атмосфере с учетом отражения от поверхности (7.4.10)-(7.4.11), в частности на ее нижней границе, при освещении атмосферы снизу излучением с вектором  $\mathbf{L}_a^\uparrow(\eta', \varphi')$ , т.е.

$$\mathbf{L}_a^\downarrow(\eta, \varphi) = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \tilde{\mathbf{T}}_a(\eta, \eta', \varphi, \varphi') \mathbf{L}_a^\uparrow(\eta', \varphi') d\eta', \quad (7.4.25)$$

где  $\tilde{\mathbf{T}}_a(\eta, \eta', \varphi, \varphi')$  – запись соответствующего метода в виде формального оператора;

3) Способ определения вектора Стокса в водной среде с учетом отражения от границы раздела (от воздуха), в частности, на ее верхней границе, при освещении водной среды сверху излучением с вектором  $\mathbf{L}_m^\downarrow(\eta', \varphi')$ , т.е.

$$\mathbf{L}_m^\uparrow(\eta, \varphi) = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 \mathbf{T}_m(\eta, \eta', \varphi, \varphi') \mathbf{L}_m^\downarrow(\eta', \varphi') d\eta', \quad (7.4.26)$$

где  $\mathbf{T}_m(\eta, \eta', \varphi, \varphi')$  – запись соответствующего метода в виде формального оператора;

4) способы пересчета  $\mathbf{L}_a^\downarrow(\eta, \varphi)$  в  $\mathbf{L}_m^\downarrow(\eta', \varphi')$  и  $\mathbf{L}_m^\uparrow(\eta, \varphi)$  в  $\mathbf{L}_a^\uparrow(\eta', \varphi')$  при переходе излучения через поверхность – соотношения (7.4.22)-(7.4.23).

Дальнейшее очевидно. Нужно построить итерационную схему, т.е. решается последовательность задач 1) – 3) – 4) – 2), а затем для дополнительного вклада выходящей из моря интенсивности цикл 4) – 3) – 2) до тех пор, пока добавка от соответствующих кратностей взаимодействия не станет меньше заданной. Предлагаем читателю самостоятельно расписать схему алгоритма на основе материала разделов 2.5 и 6.5. Как уже отмечалось, в качестве эффективного метода вычислений можно рекомендовать МСС.

#### **Особенности ММК в двухслойной среде “атмосфера – море”**

Очевидно, что для ММК нет смысла моделировать перенос излучения по указанной итерационной схеме, решая отдельно каждую из четырех задач. ММК эффективен как раз непосредственно для двухслойной среды. Правда, как отмечалось в разделе 4.1, ММК плохо пригоден для оптически толстых и, тем более, полубесконечных сред. Однако для водной поверхности, в силу наличия достаточного поглощения (в отличие от облаков), этот недостаток ММК не проявляется. По крайней мере, расчеты по ММК в двухслойной среде “атмосфера-море” успешно проводились различными авторами. Тут можно отметить интересный парадокс: ММК будет эффективнее работать при учете отражения от дна для неглубоких водоемов, т.е. в условиях усложнения стандартной задачи.

Для верхней границы атмосферы в ММК можно применять схему без вылета (4.3.3), для остальной среды – обычное моделирование свободного пробега (4.2.2). Запись в счетчики с ПЛО производится только для той среды, где находится фотон (в атмосфере – для счетчиков в атмосфере, в воде – для счетчиков в воде). При попадании фотона на поверхность (из любой среды) по альбедо  $A(\eta, \varphi)$  (см. раздел 4.2 и Приложение 11) разыгрывается альтернатива “отражение – пропускание”, и в соответствии с ней определяются новые направления фотона и, при пропускании, новая среда распространения фотона. Вес фотона при этом не меняется.

Вычислительным приемом, призванным повысить эффективность для ММК, является расщепление фотона на поверхности с организациями очередей (см. раздел 4.3): при попадании фотона на поверхность из воздуха в воду фотон дробится на две части, отраженную – с пересчетом веса  $w := wA(\eta, \varphi)$  и пропущенную – с пересчетом  $w := w(1 - A(\eta, \varphi))$ . Аналогичное дробление происходит при попадании фотона на поверхность из воды в воздух. Таким образом, образуются четыре очереди, которые можно рассматривать



последовательно. Исчерпание очередей неизбежно вследствие уменьшения веса фотона при моделировании.

Заметим, что для сферической модели атмосферы и учета поляризации излучения при рассмотрении двухслойной среды новых проблем не возникает. Напишите схему алгоритма ММК для среды “атмосфера-море” в качестве упражнения.

#### **Перенос излучения в двухслойных и многослойных средах**

Водная среда, как отмечено выше, является самой распространенной на нашей планете. Однако можно ставить задачи и для других аналогичных сред, в которые проникает излучение, например, льда (хотя лед – это тоже вода). В МКВ диапазоне в ряде моделей отражения учитывается проникновение излучения в тонкие слои различных поверхностей, поскольку его характерные длины волн уже достаточны для этого процесса. В общей постановке теории переноса излучения задача рассматривается для многослойной среды, для каждого из слоев и границ которой решены задачи переноса и проникновения излучения, аналогично приведенной выше схеме из четырех пунктов. Методы численного решения общей задачи аналогичны. Это последовательные итерации излучения в каждой среде до установления “равновесия” на границах, т.е. получения условий, когда влияние добавок к излучению, переходящему из одной среды в соседнюю, становится менее заданного значения.

### **7.5. Учет горизонтальной неоднородности атмосферы и поверхности**

#### **Постановка задачи**

До сих пор мы рассматривали зависимость параметров атмосферы только от высоты (горизонтально-однородная плоская и однородно-слоистая сферическая модели) при пространственном постоянстве отражательных характеристик поверхности. В реальности в атмосфере и, особенно, на поверхности имеются горизонтальные неоднородности оптических параметров. Рассмотрим в этом разделе возможность их учета в стандартных задачах расчетов интенсивностей и потоков излучения. Заметим, что горизонтальные неоднородности поверхности, очевидно, значительно более выражены, чем атмосферы (исключение представляет случай разорванной облачности), поэтому их учет в практических задачах можно квалифицировать как “более важный”.

#### **Система координат для сферической модели.**

Очевидно, что задание горизонтальных неоднородностей требует задания соответствующей системы координат, охватывающей всю атмосферу и поверхность. В сферическом случае такая система уже рассмотрена – это геоцентрическая система координат (см. раздел 7.1). В ней, в общем случае, все параметры атмосферы являются функциями высоты, географической широты и долготы (например, объемный коэффициент ослабления излучения есть  $\alpha(z, \vartheta_G, \varphi_G)$ ). А все параметры поверхности являются функциями широты и долготы (например, альбедо есть функция  $A(\vartheta_G, \varphi_G)$ ). Формулы пересчета координат для трассы длиной  $l$  в сферической атмосфере приведены в Приложении 12.

#### **Система координат для плоской модели**

Для плоской модели ситуация, как ни странно, сложнее, поскольку для учета горизонтальной неоднородности потребуются вводить новые координаты.

Причем, как будет ясно ниже, в разных задачах удобно использовать разные типы координатных систем. Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат, ось  $Z$  которой совместим с направлением “надир-зенит”, а ось  $X$  – с направлением отсчета азимута. Тогда, в общем случае, все параметры атмосферы будут функциями трех координат (например, объемный коэффициент ослабления  $\alpha(x, y, z)$ ), а все параметры поверхности зависят от двух координат, например, альбедо –  $A(x, y)$ . Отметим, что в плоском случае имеется проблема “привязки” начала отсчета координат к реальности. Однако мы ее не рассматриваем, поскольку фактически она связана с определением параметров атмосферы и поверхности как функций координат, а эти величины мы, как договаривались, считаем для задач переноса излучения исходно заданными.

В указанной системе координат для трассы распространения излучения длиной  $l$  из точки со стартовыми координатами  $(x_b, y_b, z_b)$  в направлении  $(\vartheta, \varphi)$  имеем формулы пересчета

$$x = x_b + l \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = y_b + l \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = z_b + l \cos \vartheta. \quad (7.5.1)$$

#### **Случай без многократного рассеяния**

Для задач без многократного рассеяния учет горизонтальных неоднородностей, по сути, мало что меняет. Поскольку трассы, на которых вычисляются интегралы, являются прямыми линиями (рефракция в горизонтально-неоднородной атмосфере нами не рассматривается), то достаточно пересчитывать на них все координаты, а по ним определять необходимые параметры атмосферы и поверхности. Пересчет координат для сферической модели осуществляется по формулам Приложения 12, а для плоской – по формуле (7.5.1).

Таким образом, для расчета функций пропускания, переноса теплового излучения (без рассеяния) и приближения однократного рассеяния солнечного излучения получаем следующую общую схему.

1) Интегрирование всегда (включая плоскую модель) ведется по трассе распространения излучения с координатой  $l$ . Началом трассы, как и прежде, является точка измерения интенсивности излучения.

2) Для очередного узла интегрирования рассчитываются новые координаты, а по ним – необходимые оптические параметры атмосферы. В общем случае применяется трехмерная интерполяция (см. Приложение 11). Дальнейшее вычисление вклада в интегральную сумму производится стандартным образом, т.е. как и в горизонтально-однородных схемах. Для выбора очередного узла интегрирования возможны две стратегии: (1) аналог горизонтально-однородной с выбором координаты  $l$  по очередному высотному уровню  $z_i$  (из (7.5.1):  $l = (z_i - z_b) / \cos \vartheta$ ), или (2) схема, которая в целом более точная, с заданием фиксированного шага  $\Delta l$ .

3) При моделировании взаимодействия с поверхностью соответствующие координаты точки  $((\vartheta_G, \varphi_G)$  для сферической модели и  $(x, y)$  для плоской) однозначно определяются трассой распространения излучения. При расчете отраженного излучения интегрирование ведется от этой точки к верхней границе атмосферы.

В качестве упражнения разберите подробности указанной модификации применительно к конкретным схемам вычислительных алгоритмов разделов 1.2-1.4 и 7.1-7.2 (соотношения (7.2.2)-(7.2.3)).

### Возможности учета многократного рассеяния

Как всегда, главной проблемой в численных методах теории переноса, становится вычисление вклада многократного рассеяния при горизонтальных неоднородностях поверхности и атмосферы. Здесь можно выделить два направления: (1) модификация соотношений теории переноса излучения и соответствующих численных методов; (2) учет горизонтальных неоднородностей в ММК.

Начнем с первого варианта. В нем основной подход заключается в приведении задачи для горизонтально-неоднородных атмосферы и поверхности к набору задач для горизонтально-однородного случая, методы решения которых считаются известными. Для этого используется разложение параметров атмосферы и поверхности на пространственно-частотные характеристики (ПЧХ), иногда говорят о “методе ПЧХ”. В настоящее время подходы с использованием ПЧХ весьма подробно разработаны и применяются для решения различных, весьма сложных задач переноса излучения в горизонтально-неоднородных средах [16]. Однако, в рамках данного пособия ограничимся “классикой ПЧХ”, т.е. рассмотрением простейшей, но практически важной задачи, которая позволит уяснить общую суть метода ПЧХ.

#### Метод ПЧХ для радиально-неоднородной поверхности

В указанной классической задаче удобно работать уже не в декартовой, а в цилиндрической системе координат  $(r, \psi, z)$ , где высота  $z$  по-прежнему отсчитывается по вертикальной оси  $Z$ ,  $r$  – расстояние от оси,  $\psi$  – азимут угла в горизонтальной плоскости. Атмосфера является горизонтально-однородной, а поверхность – идеально изотропной с альбедо  $A(r)$ , зависящим только от координаты  $r$  (но не от  $\psi$ ). На верхнюю границу атмосферы падает солнечное излучение с косинусом зенитного угла  $\eta_0$  и азимутом  $\varphi_0$ .

Искомая интенсивность излучения в такой модели формально будет функцией пяти переменных  $I(r, \psi, z, \eta, \varphi)$ , где  $\eta$  и  $\varphi$  – косинус зенитного угла и азимут излучения (в точке  $(r, \psi, z)$ ). Рассмотрим вращение модели вокруг оси  $Z$ . В силу радиальной симметрии параметров поворот на угол  $\psi$  будет эквивалентен изменению азимута Солнца  $\varphi_0$ , т.е. можно положить  $\psi = \varphi_0$ . Азимут  $\varphi$  отсчитывается от направления на Солнце (см. раздел 2.1), т.е. при повороте заменится на  $\varphi - \varphi_0$ . Таким образом, исходя из симметрии, заключаем, что реальная зависимость искомой интенсивности от координат имеет вид  $I(r, \varphi_0, z, \eta, \varphi - \varphi_0)$ . Но азимут Солнца  $\varphi_0$  не есть переменная: он жестко задан (стандартно  $\varphi_0 = 0$ ). Таким образом, в действительности интенсивность – это функция не пяти, а четырех координат  $I(r, z, \eta, \varphi)$ .

Расписывая дифференциал  $dl$  в исходном уравнении переноса для рассеянного излучения (2.1.3), получаем, как аналог (2.1.4), уравнение переноса для цилиндрической геометрии

$$\eta \frac{\partial I(r, z, \eta, \varphi)}{\partial z} + \sqrt{1 - \eta^2} \frac{\partial I(r, z, \eta, \varphi)}{\partial r} = -\alpha(z) I(r, z, \eta, \varphi) + \frac{\sigma(z)}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 x(z, \chi) I(r, z, \eta', \varphi') d\eta'. \quad (7.5.2)$$

Неоднородность поверхности проявится в граничном условии на нижней границе атмосферы ( $z = 0$ ), которое согласно (1.4.7) принимает вид

$$I^{\uparrow}(r,0,\eta,\varphi) = \frac{A(r)}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^1 I^{\downarrow}(r,0,\eta',\varphi') \eta' d\eta', \quad (7.5.3)$$

где  $I^{\uparrow}(r,0,\eta,\varphi)$  – интенсивность отраженного излучения ( $\eta < 0$ );  $I^{\downarrow}(r,0,\eta',\varphi')$  – интенсивность падающего излучения ( $\eta' > 0$ ).

Наша дальнейшая цель состоит в том, чтобы получить разложение альбедо  $A(r)$  в ряд Фурье. Однако при этом возникает некоторая трудность, поскольку значение переменной  $r$  формально является неограниченным (в теории для ее преодоления используют не ряд, а преобразование Фурье). Введем некоторое максимальное расстояние  $r_{\max}$ , далее которого решением задачи интересоваться не будем (при практических расчетах такое ограничение неизбежно). При этом возникнут неизбежные краевые искажения в области значений  $r$ , близких к  $r_{\max}$ . Однако мы их проигнорируем, считая, что нас интересует решение только для значений  $r \ll r_{\max}$  (это опять же является стандартным для прикладных задач). Теперь, разлагая функцию  $A(r)$  на отрезке  $[0, r_{\max}]$  в ряд Фурье, имеем

$$A(r) = A_0 + \sum_{k=1}^K A_{kc} \cos \frac{k\pi r}{r_{\max}} + A_{ks} \sin \frac{k\pi r}{r_{\max}}. \quad (7.5.4)$$

В (7.5.4) мы не записали у нулевого члена ряда коэффициент  $1/2$ , внося его для удобства непосредственно в значение  $A_0$ . Значение  $K$  на практике всегда выбирается конечным, т.к. в теории ряд Фурье является расходящимся. Отметим, что обычно составляющие ряда с номерами  $k \geq 1$  строятся как малые добавки к однородному альбедо  $A_0$ , хотя формально этого не требуется. Тем не менее коэффициенты  $A_{kc}$  и  $A_{ks}$  всегда достаточно малы, поскольку ограничены физическим условием  $0 \leq A(r) \leq 1$ .

Запишем искомую интенсивность в виде аналогичного (7.5.4) ряда Фурье

$$I(r, z, \eta, \varphi) = I_0(z, \eta, \varphi) + \sum_{k=1}^K I_{kc}(z, \eta, \varphi) \cos \frac{k\pi r}{r_{\max}} + I_{ks}(z, \eta, \varphi) \sin \frac{k\pi r}{r_{\max}}. \quad (7.5.5)$$

Коэффициенты рядов (7.5.4) – (7.5.5) называются пространственно-частотными характеристиками. При подстановке (7.5.5) в уравнение переноса (7.5.2) во втором слагаемом в правой части возникнут выражения вида  $\frac{k\pi}{\tau_{\max}} \sin \frac{k\pi r}{\tau_{\max}}$  и

$\frac{k\pi}{\tau_{\max}} \cos \frac{k\pi r}{\tau_{\max}}$ . Однако ими можно пренебречь из-за большого значения  $r_{\max}$ ,

точнее, из-за условия  $r \ll r_{\max}$  (это вновь игнорирование краевых искажений). Но тогда уравнение переноса (7.5.2) для каждой из ПЧХ переходит в “обычное” уравнение (2.1.4)! Таким образом, все влияние горизонтальной неоднородности проявится только в граничных условиях (7.5.3).

При подстановке в (7.5.3) рядов ПЧХ (7.5.4) и (7.5.5) в левой части возникнет произведение рядов Фурье. Но такое произведение – это тоже ряд Фурье (в силу свойств выражения произведения синусов и косинусов через суммы разностей и сумм аргументов). Приравнявая в левой и правой частях (7.5.3) ПЧХ с одинаковыми тригонометрическими функциями, получаем для них систему граничных условий, в которых для краткости записи не будем

указывать у интенсивностей их зависимость от переменных и общий множитель  $1/\pi$ , а также интегралы для интенсивностей в правой части (знак равенства заменим “следствием”). Таким образом, для граничных условий имеем соотношения

$$\begin{aligned}
 I_0^\uparrow &\leftarrow A_0 I_0^\downarrow + \sum_{m=1}^K (A_{kc} I_{kc}^\downarrow + A_{ks} I_{ks}^\downarrow), \\
 I_{1c}^\uparrow &\leftarrow A_0 I_{1c}^\downarrow + A_{1c} I_0^\downarrow + \frac{1}{2} \sum_{m=2}^K (A_{mc} I_{m-1,c}^\downarrow + A_{ms} I_{m-1,s}^\downarrow), \\
 I_{1s}^\uparrow &\leftarrow A_0 I_{1s}^\downarrow + A_{1s} I_0^\downarrow + \frac{1}{2} \sum_{m=2}^K (A_{m-1,c} I_{ms}^\downarrow + A_{ms} I_{m-1,c}^\downarrow), \\
 I_{kc}^\uparrow &\leftarrow A_0 I_{kc}^\downarrow + A_{kc} I_0^\downarrow + \frac{1}{2} \sum_{m=k}^K (A_{mc} I_{m-k,c}^\downarrow + A_{ms} I_{m-k,s}^\downarrow) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^k (A_{mc} I_{k-m,c}^\downarrow + A_{ms} I_{k-m,s}^\downarrow), \\
 I_{ks}^\uparrow &\leftarrow A_0 I_{ks}^\downarrow + A_{ks} I_0^\downarrow + \frac{1}{2} \sum_{m=k}^K (A_{m-k,c} I_{ms}^\downarrow + A_{ms} I_{m-k,c}^\downarrow) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^k (A_{k-m,c} I_{ms}^\downarrow + A_{ms} I_{k-m,c}^\downarrow), \\
 k &= 2, \dots, K.
 \end{aligned} \tag{7.5.6}$$

Уравнение переноса излучения с системой граничных условий (7.5.6) решается стандартным итерационным методом. За нулевое приближение принимается одинаковое для всех ПЧХ значение, вычисленное при альбедо  $A_0$ . Затем полученные ПЧХ подставляются в (7.5.6) и для каждой находится составляющая отражения от поверхности. Для нее вновь решается задача переноса излучения, но уже как для добавки от отражения к основной интенсивности (см. раздел 2.4). Для всех полученных решений вновь вычисляются значения по (7.5.6) и т.д., пока изменения искомой интенсивности (7.5.5) перестанут быть значимыми. Отметим, что для указанной задачи легко учесть и тепловое излучение поверхности с радиально-неоднородным альбедо. Напишите схему соответствующего алгоритма в качестве упражнения.

### Метод Монте-Карло

В ММК, как всегда, все весьма просто.

Поскольку траектория каждого фотона в ММК моделируется прямой линией, направление которой и точка старта известны, то для каждой конкретной траектории задача фактически сводится к рассмотренным выше трем модификациям. Т.е. необходимо, проводя трассу от узла к узлу интегрирования, последовательно вычислять оптическую толщину и далее использовать ее для локальных оценок или для моделирования свободного пробега фотона. Причем в горизонтально-неоднородной атмосфере это нужно делать как для сферической, так и для плоской моделей (т.к. для плоской атмосферы уже нельзя пользоваться оптической глубиной как координатой). Фактически это схема алгоритма для определения оптического пути в сферической атмосфере из Приложения 12. Единственным различием является невозможность использовать для согласования геометрического и оптического пути аналитические аппроксимации. Но это даже упрощает ситуацию, поскольку остается лишь предположение линейного изменения объемного коэффициента ослабления между узлами интегрирования, т.е. возникает квадратное уравнение для определения координаты  $l$ , которое аналогично приведенному в Приложении 12 для кусочно-линейной аппроксимации в плоской атмосфере.

### Учет неоднородности поверхности в ММК

Рассмотрим отдельно случай применения ММК в плоской модели переноса излучения для горизонтально-однородной атмосферы, но для горизонтально-неоднородной поверхности. Как указано выше, он очень важен для ряда прикладных задач.

Здесь можно построить очень простую схему ММК, которая фактически эквивалентна однородному случаю, если учесть, что после отражения от поверхности перенос фотона в атмосфере фактически эквивалентен переносу “плоскости поверхности”. Это можно назвать вариантом “плоского фотона”.

Пусть альbedo поверхности задано как функция  $A(x, y)$  (здесь удобны декартовы координаты). Проведем разбиение плоскости поверхности на конечную сетку  $x_m, m=1, \dots, M+1, y_l, l=1, \dots, L+1$  (центр координат должен лежать в центре этого квадрата, хотя формально этого и не требуется). Теперь альbedo представится в виде конечной сетки, т.е. пикселей  $A_{ml}, m=1, \dots, M, l=1, \dots, L$ . В границах каждого пикселя альbedo постоянно, а пиксель  $(m, l)$  для произвольных координат  $(x, y), x_1 \leq x < x_{M+1}, y_1 \leq y < y_{L+1}$ , определяется неравенствами  $x_m \leq x < x_{m+1}$  и  $y_l \leq y < y_{l+1}$  (см. Приложение 1).

В качестве координат фотона теперь будут выступать  $(x, y, z)$ , однако моделирование свободного пробега и локальных оценок необходимо вести по оптической глубине, применяя алгоритм для плоской атмосферы (см. раздел 4.3). Формулы пересчета глубины в координату  $z$  приведены в Приложении 12. После этого по (7.5.1) находится геометрический путь

$$l = (z' - z) / \eta, \quad (7.5.7)$$

где  $z$  – высота до пробега,  $z'$  – высота после пробега. По значению  $l$  и азимуту фотона  $\varphi$  находятся новые координаты  $x$  и  $y$  по (7.5.1).

Весу фотона припишем точно такую же матрицу весов-пикселей  $w_{ml}$ , как у альbedo поверхности. Пока фотон не достиг поверхности, его вес пересчитывается целиком (в начале траектории  $w_{ml} = 1$ , при взаимодействии с атмосферой  $w_{ml} := w_{ml} \Lambda$ ). А вот при взаимодействии с поверхностью он пересчитывается по пикселям матрицы поверхности

$$w_{m'l'} := w_{m'l} A_{m'l}, \quad (7.5.8)$$

где набор значений  $m', l'$  определяется по описанному выше алгоритму (с обязательным выполнением неравенств!) для набора координат  $x + x_m, y + y_l, m=1, \dots, M+1, l=1, \dots, L+1$ , где  $(x, y)$  – координаты фотона на поверхности. Смещение конечных частей как плоскости фотона, так и плоскости поверхности при присвоении (7.5.8) фактически приводит к описанному выше неизбежному краевому искажению. Поэтому реальный смысл будут иметь результаты для счетчиков, близких в горизонтальной плоскости к началу координат.

При записи в счетчики интенсивности для заданной геометрии (т.е. по координатам счетчика и его направлению) по соотношениям вида (7.5.7) и (7.5.1) определяется точка фотона, из которой излучение приходит в счетчик. Затем по ней вычисляются конкретные индексы веса  $w_{ml}$ , с которыми он используется в ПЛЮ. Для полусферических потоков (а именно эти величины есть смысл моделировать в горизонтально-неоднородной среде с последующим усреднением по площади) следует ввести такую же матрицу пикселей и пересчитывать координаты аналогично (7.5.8). В целом, если наглядно

представить себе перемещение в атмосфере фотона как прямоугольника из пикселей, то алгоритм моделирования становится предельно ясным. Напишите его схему в качестве упражнения.

## 8. Радиационные коды – программы расчета характеристик излучения

### 8.1. Классификация радиационных кодов

Актуальность решения современных прямых и обратных задач атмосферной оптики явилась причиной создания многочисленных программ расчета различных характеристик полей излучения в атмосферах планет и реализации различных дистанционных методов излучения, так называемых радиационных кодов (radiation codes). Эти коды отличаются различными особенностями, важнейшие из которых позволяют их классифицировать следующим образом:

1. Рассчитываемые характеристики.
2. Область спектра, спектральное разрешение расчетов.
3. Метод расчета.
4. Учитываемые процессы взаимодействия излучения с атмосферой.
5. Модель отражения от поверхности.
6. Безоблачная или облачная атмосфера.
7. Геометрия среды (плоскопараллельная или сферическая).
8. Используемые исходные данные.
9. Важнейшие используемые приближения.
10. Язык программирования кода.
11. Доступность кода.

Коды могут быть предназначены для расчета оптических толщин, функций пропускания, интенсивностей и потоков излучения, радиационных притоков энергии, вариационных производных интенсивности излучения и т.д. при различной геометрии среды и условий наблюдений. Может рассматриваться солнечное излучение или собственное излучение системы атмосфера–поверхность. Собственное излучение может быть равновесное и неравновесное.

Коды могут отличаться спектральной областью применения (например, УФ и видимая области спектра, ИК область, МКВ и т.д.), а также спектральным разрешением, которое реализует код. Важное значение имеют используемые методы численного решения уравнений переноса излучения, учитываемые процессы взаимодействия излучения с атмосферой — молекулярное поглощение и излучение газов и каких, аэрозольное поглощение и рассеяние, разные типы рассеяния, учет поляризационных характеристик и т.д. Определенное значение во многих задачах имеет применяемая модель отражения от поверхности, начиная от ламбертовского приближения и до использования двунаправленного коэффициента отражения.

Существуют коды для расчетов в безоблачной атмосфере или с учетом облаков различного типа, например, водяных, кристаллических или смешанных. Есть коды, предназначенные для применения в плоскопараллельной или сферической моделях атмосферы, одномерной или трехмерной средах. Как правило, коды могут использовать различную исходную информацию, например, о параметрах тонкой структуры молекулярного поглощения (например, банки данных HITRAN [Rothman et al., 2013] или GEISA [<http://ara.abct.lmd.polytechnique.fr/index.php?page=geisa-2>], а также различные специализированные банки данных), оптических и микрофизических



характеристиках аэрозолей и облаков, различные параметры самой атмосферы и т.д.

Большое разнообразие наблюдается в использовании различных приближений теории и практики рассмотрения переноса излучения в атмосферах планет, например, выполнимость закона Кирхгофа, сферичность атмосферных аэрозолей, различные модели молекулярного поглощения и т.д. Часто коды различают по методике учета молекулярного поглощения — коды, использующие прямое интегрирование монохроматических величин (line-by-line), и коды, использующие функции пропускания в конечных спектральных интервалах (модели полос, эмпирические данные, k-метод и т.д.).

Разумеется, очень важны используемый язык программирования и доступность радиационного кода. Многие коды можно получить для научных исследований бесплатно, но некоторые коды только продаются. Стоит отметить, что многие из них постоянно совершенствуются, и расширяется область их применения. Например, в настоящее время имеется уже одиннадцатая версия программы RTTOV ([RTTOV v11.3](http://nwpsaf.eu/site/software/rttov/rttov-v11/)), широко используемая при интерпретации измерений различных спутниковых приборов [<http://nwpsaf.eu/site/software/rttov/rttov-v11/>].

## **8.2. Примеры радиационных кодов**

Приведем краткую информацию о радиационных кодах разного типа, используемых для расчетов различных характеристик, в разных спектральных областях, использующих различные численные методы.

### **Коды прямого (line-by-line) спектрального интегрирования**

Программы, использующие прямое спектральное интегрирование для расчетов представлены в табл. 8.1.

### **Коды с использованием различных моделей молекулярного поглощения**

Модели полос поглощения используются для оценок потоков радиации (солнечное и ИК) в атмосфере, освещенностей поверхности и приходящей на поверхность солнечной энергии. Коды с использованием различных моделей молекулярного поглощения представлены в табл. 8.2.

Таблица 8.1. Коды прямого (line-by-line) спектрального интегрирования

Название	Авторы/сылки	Примечания
4AP/O	Scott and Chedin, 1981	Быстрый и точный код для ИК области, расчет функций пропускания и интенсивности излучения. Основан на предварительно рассчитанных монохроматических оптических толщинах для различных слоев атмосферы. Учитывает поглощение 43 атмосферных газов.
<a href="#">FUTBOLIN</a>	Kratz, et al., 2005	Расчеты функций пропускания и излучения в планетных атмосферах в спектральной области 0.3—1000 мкм. Использует сферическую или плоскопараллельную модель атмосферы и спектральные параметры HITRAN или GEISA. Код учитывает интерференцию линий, континуальное поглощение $H_2O$ , $O_2$ , $N_2$ , $CO_2$ и $H_2$ , а также нарушения локального термодинамического равновесия (ЛТР) для вращательных, колебательных и электронных уровней энергий молекул.
RFM	Dudhia, 2016	Тестовая многоцелевая прямая модель переноса излучения, основанная на модели GENLN2. Сферическая и плоскопараллельные модели, однородные пути, учет аппаратных функций приборов, интерференция линий $CO_2$ , континуума $H_2O$ , $O_2$ , $N_2$ and $CO_2$ , неравновесности атмосферы, линий и полос изотопов, расчет производных излучения по различным переменным, наблюдения из космоса, самолетов, аэростатов, с земли. Расчеты функций пропускания, интенсивностей и потоков, поглощения, радиационных изменений температуры, оптических толщин, яркостных температур излучения. Учет горизонтальной неоднородности.
GENLN2	Edwards, 1992	Модель Edwards для расчетов функций пропускания и излучения. Расчеты функций пропускания и интенсивностей теплового и неравновесного излучения в ИК области спектра.
<a href="#">LBLRTM</a>	Clough and Iacono, 1995	Модель переноса излучения для расчета функций пропускания, спектров интенсивностей теплового излучения (для различной геометрии измерений), потоков и притоков излучения для неоднородных моделей атмосферы.

Таблица 8.2. Коды с использованием различных моделей молекулярного поглощения

Название	Авторы/фирмы	Примечания
<a href="#">MATISSE</a>	ONERA/ <a href="http://matisse.onera.fr/">http://matisse.onera.fr/</a>	Расчет характеристик излучения (солнечного и теплового) для приборов-имаджеров (интенсивности и функции пропускания, солнечное излучение и т.д.) в спектральной области 0.4—14 мкм. Учет различного типа облаков и поверхностей.
<a href="#">MODTRAN</a>	Berk et al., 1983 <a href="http://modtran.spectral.com/">http://modtran.spectral.com/</a>	Расчет функций пропускания и излучения со средним спектральным разрешением ( $2\text{ см}^{-1}$ и $20\text{ см}^{-1}$ в УФ области) в спектральной области от 0 до $50000\text{ см}^{-1}$ . Модтран дает лучшее спектральное разрешение и точность, чем код Лоутран. Многие характеристики кода соответствуют коду Лоутран 7, включая учет сферичности атмосферы, рефракции, солнечного и лунного излучений, релеевского и аэрозольного многократного рассеяния и моделей атмосферы (газы, аэрозоли, туманы, дожди).
<a href="#">6S</a>	Kotchenova et al., 2006 <a href="https://en.wikipedia.org/wiki/6S">https://en.wikipedia.org/wiki/6S</a>	Код предназначен для моделирования надирных самолетных измерений отраженного солнечного излучения, учитывает неламбертовский характер отражения от поверхности, поглощения газов, релеевского и аэрозольного рассеяния. Спектральное разрешение 2.5 нм.
<a href="#">RRTM</a>	Mlawer et al., 1997 <a href="http://rtweb.aer.com/rrtm.html">http://rtweb.aer.com/rrtm.html</a>	Код использует k-метод учета молекулярного поглощения для расчетов потоков излучения и скоростей нагревания в коротковолновой ( $820\text{—}50000\text{ см}^{-1}$ ) и длинноволновой ( $10\text{—}3250\text{ см}^{-1}$ ) областях спектра. Поглощение газов учитывается с помощью модели <a href="#">LBLRTM</a> . Учитываются водяной пар, углекислый газ, озон, метан, окислы азота и различные халокарбоны. Учитывается влияние облаков и аэрозолей и многократное рассеяние с помощью кода <a href="#">DISORT</a> .
<a href="#">RRTMG</a>	Iacono et al., 2008 <a href="http://rtweb.aer.com/rrtm.html">http://rtweb.aer.com/rrtm.html</a>	Более эффективная (ускоренная) версия кода <a href="#">RRTM</a> с минимальными потерями точности для применения в моделях общей циркуляции. Она отличается использованием 2-х потокового приближения для учета многократного рассеяния, включает аэрозольное поглощение в длинноволновой области, использует Monte-Carlo Independent Column Approximation (McICA) для учета мезомасштабной изменчивости облаков.
<a href="#">RTTOV</a>	<a href="http://nwpsaf.eu/site/software/">http://nwpsaf.eu/site/software/</a>	Используется для моделирования уходящего излучения и яркостных температур излучения и решает прямые задачи теории переноса и расчеты вариационных производных излучения (полные якобианы) для различных спутниковых приборов

### Плоскопараллельные коды с учетом многократного рассеяния

Таблица 8.3. Плоскопараллельные коды с учетом многократного рассеяния.

Название	Авторы/ фирмы	Примечания
SBDART	Ricchiaz zi et al., 1998	Фортрановский код для анализа разнообразных задач спутниковых дистанционных измерений и радиационного баланса системы атмосфера–поверхность.
<a href="#">DISORT</a>	Stamnes et al., 1988	Универсальный радиационный код для плоскопараллельной модели атмосферы для решения прямых и обратных задач в широкой спектральной области от УФ до радиоволн.
<a href="#">FluxNet</a>	Key and Schweiger, 1998	Версия кода с использованием искусственных нейронных сетей. Для набора данных о поверхности, облаках и характеристиках атмосферы рассчитываются восходящие и нисходящие потоки излучения в коротковолновой и длинноволновой областях спектра.
CRM	<a href="http://du&lt;br/&gt;st.ess.uci.edu/cr&lt;br/&gt;m/index.shtml">http://du st.ess.uci.edu/cr m/index.shtml</a>	Код является автономной версией радиационной модели используемой в NCAR Community Climate Model (CCM) для исследований радиационного баланса планет, влияния парниковых газов и расчета радиационных факторов климата.
libRadtran	Mayer and Kylling, 2005	Расчеты интенсивностей, потоков излучения и актинических потоков в земной атмосфере в солнечной и тепловой областях спектра.
KARINE	<a href="http://w&lt;br/&gt;ww.energetique.&lt;br/&gt;ups-&lt;br/&gt;tlse.fr/~eymet/ka&lt;br/&gt;rine.html">http://w ww.energetique. ups- tlse.fr/~eymet/ka rine.html</a>	Код использует алгоритмы Монте-Карло с оптимизацией для быстрых и точных расчетов в сильно поглощающих и рассеивающих атмосфер планет. Данные k-параметризации молекулярного поглощения требуются для его работы.
RTMOM	<a href="http://w&lt;br/&gt;ww.rayference.e&lt;br/&gt;u/RTMOM/">http://w ww.rayference.e u/RTMOM/</a>	Код на языке Фортран 90 для расчетов переноса излучения в плоскопараллельной горизонтально однородной атмосфере с учетом рассеяния различного типа (аэрозоли, облака). Осуществляется учет 7 поглощающих газов, включая водяной пар, озон и углекислый газ, с помощью k-метода. Уравнение переноса излучения решается с помощью Matrix Operator Method. Расчеты проводятся для солнечной компоненты и собственного теплового излучения в спектральной области 0.25—15 мкм со спектральным разрешением от 0.001 до 0.01 мкм.
SMART	Seidel et al., 2010	Код высокой эффективности (в 25 раз быстрее кода 6S). Отличается от более точных кодов на 5—15% в зависимости от типа расчетов. Рекомендуется использовать для моделирования космических и самолетных измерений и восстановлений аэрозольных оптических толщин в видимой области спектра.

### 8.3. Краткий анализ радиационных кодов

Мы не ставим своей задачей полное описание многих существующих в настоящее время радиационных кодов, но приведем различные примеры кодов, которые наиболее часто используются, в том числе на кафедре физики атмосферы СПбГУ. Эта информация может помочь выбрать оптимальный код при решении конкретной рассматриваемой задачи. Описание различных кодов содержится также в монографиях [Тимофеев и Васильев, 2003; Мицель и др., 2001].

Следует отметить, что многие алгоритмы решения обратных задач атмосферной оптики включают в себя решение прямых задач, т.е. вычисления интенсивности излучения в различных областях спектра. В связи с этим в настоящее время разработаны специальные компьютерные коды (компьютерные модели), позволяющие рассчитывать функции пропускания, интенсивности собственного (равновесного и неравновесного) излучения, интенсивности рассеянного и отраженного солнечного излучения для различной геометрии распространения и генерации излучения. Эти радиационные коды отличаются областью спектра, выходными величинами, детальностью рассмотрения процессов трансформации и генерации излучения, допустимым спектральным разрешением, возможностью учета поляризации излучения, использованием различных приближений и т.д. Типичные приближенные методы при решении прямых задач теории переноса излучения рассмотрены в монографиях [Мицель и др., 2001, Тимофеев и Васильев, 2003].

#### Программа LOWTRAN [Kneizys et al., 1983]

Существуют различные версии данной программы, которая постоянно совершенствовалась. Опишем версию LOWTRAN-7. Программа позволяет рассчитывать функции пропускания и интенсивности излучения для достаточно низкого спектрального разрешения (начиная с  $20 \text{ см}^{-1}$ ) в широкой спектральной области от 0 до  $50000 \text{ см}^{-1}$ . Расчет интенсивностей излучения (теплового и солнечного) может осуществляться с учетом многократного рассеяния. В расчетах используются функции пропускания для конечных спектральных интервалов в виде экспоненциальных функций. Учитывается селективное и континуальное молекулярное поглощение, молекулярное рассеяние, аэрозольное рассеяние и поглощение, поглощение и рассеяние в облаках и осадках. Расчеты можно производить для различной геометрии измерений в сферической атмосфере с учетом эффектов рефракции. При расчетах можно использовать шесть среднеклиматических моделей атмосферы, либо произвольные модели, вводимые в программу пользователем.

Аэрозольные модели представляют собой четырехслойную атмосферу — пограничный слой (0—2 км), тропосфера (2—10 км), стратосфера и мезосфера (10—120 км). Для пограничного слоя имеются различные типы аэрозольных моделей — сельский, городской, морской, тропосферный, пустынный. Модели облаков включают в себя пять типов водных, а также ряд кристаллических облаков.

В силу достаточно простой аппроксимации молекулярного поглощения и приближенного рассмотрения эффектов многократного рассеяния программа LOWTRAN-7 характеризуется средней точностью и, как правило, используется для прикладных расчетов.

### **Программа MODTRAN [Berk et al., 1983]**

Данная программа была создана как усовершенствованная версия программы LOWTRAN, и она отличается от последней, прежде всего, возможностью осуществлять расчеты с более высоким спектральным разрешением (начиная с  $2\text{ см}^{-1}$ ). Кроме того в этой программе используется более совершенный подход при учете молекулярного поглощения (использование фойгтовского контура линий, температурной зависимости функций пропускания и т.д.). По своему качеству и возможностям она занимает промежуточное положение между программами LOWTRAN и FASCOD.

На основе прямого метода расчетов были созданы программы во многих научных учреждениях (например, СПбГУ, ИОА СО РАН, ИФА РАН, Геофизическая лаборатория Военно-воздушных сил США и т.д.).

### **Программа FASCOD-3 [Chetwynd et al., 1994]**

Программа FASCOD-3 (The Fast Atmospheric Signature Code – version 3) использует эффективный алгоритм прямого расчета функций пропускания (для однородных и неоднородных условий) и расчета интенсивностей излучения в спектральной области от УФ до МКВ диапазона ( $0\text{—}50000\text{ см}^{-1}$ ) и диапазоне высот от 0 до 120 км. При расчете теплового излучения можно учитывать процессы многократного рассеяния излучения, эффекты интерференции спектральных линий, отклонения от ЛТР, поглощение кислорода и озона в УФ и видимой областях спектра. Кроме этого возможны расчеты так называемых *весовых функций*, используемых при решении обратных задач атмосферной оптики. При расчетах контур спектральных линий предполагается Фойгтовский. Отклонения от лоренцовских крыльев линий учитываются с помощью континуального поглощения  $\text{H}_2\text{O}$  и поправочной функции для  $\text{CO}_2$ . Параметры спектральных линий заимствуются из базы данных HITRAN. В радиационный код включены различные модели аэрозоля и облаков. Модели атмосферы охватывают 6 климатологических районов Земли (включая изменяющиеся профили содержаний  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{O}_3$ ,  $\text{CH}_4$ ,  $\text{CO}$  и  $\text{NO}_2$ ) и среднеглобальные профили еще 20 других газов атмосферы. В расчетах можно учитывать спектральные характеристики отражения от подстилающей поверхности. Качество расчетов по программе FASCOD-3 проверялось на основе сравнений с расчетами по другим программам и экспериментальными данными.

### **Программа RADTRAN [Neuhauser, et al., 2000]**

Эта программа предназначена для расчетов атмосферного ослабления и яркостной температуры теплового излучения в спектральной области  $1\text{—}300\text{ ГГц}$ . При расчетах учитывается молекулярное поглощение кислорода, водяного пара (линии и континуум), ослабление в облаках и осадках. Модели атмосферы заимствованы из программы LOWTRAN или вводятся в программу ее пользователем. Геометрия измерений и излучательные способности поверхности также задаются пользователем. Кроме этого программа содержит излучательные способности девяти типов поверхностей (с учетом их поляризационных характеристик). При расчете радиационных характеристик в осадках учитывается многократное рассеяние. Вклад спектральных линий поглощения учитывается в диапазоне  $\pm 25\text{ см}^{-1}$  от центров линий. Вклад крыльев линий учитывается с помощью предварительно рассчитанного крылового вклада.

### **Программа GENLN-2 [Edwards, 1992]**

Программа предназначена для расчетов ИК прозрачности атмосферы, собственного излучения, потоков, скорости выхолаживания, а также может использоваться для моделирования результатов измерений спектральных приборов различных типов. Поддерживаются различные геометрии измерений. С момента своего появления в конце 1980-х годов эта программа стала "эталонной" в задачах спутниковой метеорологии, дистанционного зондирования малых газовых составляющих, лабораторной спектроскопии, при создании радиационных блоков для климатических моделей, при разработке параметризаций расчета пропускания в оперативных алгоритмах. Программа интенсивно использовалась для исследования влияния неравновесных процессов на перенос излучения.

В программе учитывается рефракция в атмосфере и ее сферичность. Форма спектральных линий — фойгтовская. При этом учитывается ее отклонения для крыльев линий. Вклад спектральных линий поглощения учитывается в диапазоне  $\pm 25 \text{ см}^{-1}$  от центров линий, а вклад крыльев линий — с помощью предварительно рассчитанного крылового вклада. Параметры линий заимствуются из базы данных HITRAN. Учитываются явления интерференции линий в полосах поглощения  $\text{CO}_2$ . Последние версии программы GENLN-2 позволяют проводить расчеты для неравновесной атмосферы.

### **Программа SHARC [Sundberg, et al., 1995]**

Данная программа была специально создана для расчетов неравновесного излучения в ИК области спектра (2—40 мкм) для высот в атмосфере от 60 до 300 км. В программе учитывается излучение пяти наиболее важных атмосферных газов для рассматриваемых высот —  $\text{CO}_2$ ,  $\text{NO}$ ,  $\text{O}_3$ ,  $\text{H}_2\text{O}$  и  $\text{CO}$ . В самой программе осуществляются расчеты населенностей возбужденных состояний указанных выше молекул. Кроме того, программа содержит модуль, позволяющий рассчитывать характеристики газового состава атмосферы. Учет селективности поглощения осуществляется с помощью модели изолированной линии, что ограничивает предельное спектральное разрешение расчетов до значения  $0.1 \text{ см}^{-1}$ . Форма линий поглощения — фойгтовская. Исходные параметры линий заимствуются из базы данных HITRAN.

### **Программа GOMETRAN [Rozanov, et al., 1997]**

Программа предназначена для расчетов интенсивности уходящего отраженного и рассеянного солнечного излучения в спектральной области 240—790 нм. Последующие версии программы, например SCIATRAN, позволяют рассчитывать уходящее излучение и в более длинноволновой области. GOMETRAN, в частности, предназначался для интерпретации измерений спутникового многоканального спектрометра GOME (европейский спутник ERS-2), и поэтому в ней предусмотрен расчет вариационных производных уходящего излучения по различным параметрам атмосферы — содержания поглощающих газов и оптические характеристики аэрозоля. Для решения уравнения переноса излучения в плоскопараллельной модели атмосферы с учетом многократного рассеяния использовался метод конечных разностей. Приближенный учет сферичности атмосферы производится только с помощью учета сферичности при расчете прямого солнечного излучения. Первоначальная версия программы предназначалась для использования для безоблачной атмосферы. В дальнейшем появились версии и для облачной

атмосферы. Для учета селективного молекулярного поглощения используется k-метод.

### **Программа SCIATRAN [Rozanov, et al., 2014]**

Код SCIATRAN для расчета уходящего солнечного излучения для сферической модели (наблюдения горизонта планеты) создан авторами программы GOMETRAN (Бременский университет, Германия) и находится в свободном доступе на сайте <http://www.iup.uni-bremen.de/sciatran/>. Радиационный код SCIATRAN был создан для быстрого и точного моделирования спутниковых экспериментов по измерению спектров рассеянной солнечной радиации в УФ, видимом и ближнем ИК диапазонах длин волн: спектрометры GOME (240—790 нм; надирная геометрия) и SCIAMACHY (240—2400 нм; надирная, лимбовая и затменная солнечная/лунная геометрии). Более того, программа может использоваться также для моделирования измерений с поверхности Земли. В последние годы было опубликовано множество статей и защищено диссертаций, демонстрирующих то, что SCIATRAN является удобным математическим инструментом для решения многих прикладных задач таких как: восстановление содержаний атмосферных составляющих по измерениям излучения, вычисление воздушных масс и содержания атмосферных поглощающих газов на наклонных трассах, а также восстановление высоты верхней границы облаков. Этот код учитывает газовое поглощение, молекулярное рассеяние, рефракцию, отражение от поверхности или облаков, а также *многократное рассеяние*. Высокое качество этого радиационного кода было продемонстрировано в международном тестировании [Loughman R.P. et al., 2004].

### **Пакет прикладных программ AIRA (Absorption of Infrared Radiation in the Atmosphere)**

Пакет разработан в Институте оптики атмосферы СО РАН и позволяет проводить расчеты различных радиационных характеристик атмосферы [Мицель и др., 2001; Комаров и др., 1988; Mitsel, et al., 1995].

Следует упомянуть о еще одном классе радиационных кодов, используемых для решения прямых задач в оперативных системах обработки измерений различных спутниковых приборов. Очень высокие требования к быстродействию этих кодов (необходимость обработки огромного объема спутниковой информации за ограниченное время) привело к созданию специальных компьютерных программ, основанных на использовании различных вычислительных приемов (нейронные сети, простая параметризация различных зависимостей и т.д.). Приведем краткий анализ ряда кодов этого типа по публикации [Успенский и др., 2005].

В настоящее время существует несколько программных комплексов, предназначенных для моделирования и анализа данных ИК зондировщиков типа IASI, AIRS, CrIS. Большинство указанных комплексов (RTTOV, RTIASI, SARTA, 4A/OP), которые за рубежом принято называть FRTM (Fast Radiative Transfer Model — быстрая модель радиационного переноса), базируется на параметризации результатов точного спектрального (line-by-line — LBL) и пространственного интегрирования уравнения переноса ИК-излучения для плоскопараллельной безоблачной атмосферы.



### RTTOV [Saunders, et al., 1999]

Основное назначение программных комплексов RTTOV (последние версии — RTTOV-7, RTTOV-8) — быстрый и достаточно точный расчет измеряемых на верхней границе атмосферы спектров интенсивности уходящего излучения  $\mathbf{J}$  по заданному вектору параметров состояния атмосферы и поверхности  $\mathbf{x}$ :  $\mathbf{J} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ , где  $\mathbf{A}$  — оператор уравнения переноса или оператор прямой задачи. Вектор  $\mathbf{x}$  размерности  $(m \times 1)$  в RTTOV-7 включает профили температуры  $T(p)$ , влажности  $q(p)$ , заданные на фиксированной сетке давлений (43 уровня в слое 1015—0.1 гПа), а также  $T_s$ ,  $\varepsilon$  и  $T_a$ ,  $q_a$  (температура и влажность воздуха в приповерхностном слое). В RTTOV-8 предусмотрено расширение  $\mathbf{x}$  за счет включения профиля концентрации  $\text{CO}_2$  (как «переменного» газа) и данных о параметрах облачности. Комплекс RTTOV позволяет также вычислить матрицу якобианов  $\mathbf{H}$  (вариационных или функциональных производных  $\mathbf{y}$  по  $\mathbf{x}$ ), с помощью которой рассчитываются вариации излучения  $\delta\mathbf{R}$ , соответствующие вариациям компонентов вектора состояния  $\delta\mathbf{x}$  относительно исходного состояния  $\mathbf{x}_0$ :  $\delta\mathbf{R} = \mathbf{H}(\mathbf{x}_0) \delta\mathbf{x}$ .

Функции пропускания  $\tau(0,p)$  (в слое атмосферы от верхней границы атмосферы (ВГА) с  $p=0$  до текущего  $p$ ), входящие в оператор  $\mathbf{H}$ , рассчитываются с помощью формул множественной линейной регрессии, причем в качестве предиктантов используются оптические толщины, а в качестве предикторов — различные функционалы вектора состояния  $\mathbf{x}$ . В рамках принятой слоистой модели атмосферы линейные регрессионные оценки оптических толщин  $d_{i,j}$  слоев атмосферы между ВГА ( $j=0$ ) и текущим уровнем  $j$  строятся отдельно для равномерно перемешанных газов, водяного пара и озона по формулам ( $i$  — номер поглотителя):

$$d_{i,j} = d_{i,j-1} + \sum_{k=1}^K a_{i,j,k} X_{k,j}.$$

Здесь  $a_{i,j,k}$  — коэффициенты регрессии,  $X_{k,j}$  — предикторы, представляющие функционалы от вектора состояния  $\mathbf{x}$  и угла визирования  $\theta$ ,  $K$  — общее количество предикторов. В RTTOV-7 принято  $K=10$  для равномерно перемешанных газов,  $K=15$  для водяного пара и  $K=11$  для озона.

Комплексы RTTOV-7, RTTOV-8 обеспечивают моделирование измерений большинства известных ИК зондировщиков (в том числе AIRS) и сканеров (включая AVHRR и MODIS). Следует отметить, что специально разработанный по заказу Eumetsat для моделирования данных Фурье-спектрометра IASI программный комплекс RTIASI по принципам построения и использованным атмосферным моделям близок к RTTOV.

### SARTA [Strow, et al., 2003]

Для моделирования и анализа измерений зондировщика AIRS разработан комплекс быстрых радиационных расчетов SARTA (Stand alone AIRS Radiative Transfer Algorithm). Методология быстрых расчетов характеристик переноса подобна используемой в RTTOV, RTIASI. В отличие от RTTOV, RTIASI в модели SARTA используются 5 переменных газовых компонент:  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{O}_3$ ,  $\text{CO}$ ,  $\text{CH}_4$ ,  $\text{CO}_2$ . Кроме того, предусмотрено применение 2-х сеток: деление всей толщи атмосферы на 100 слоев с фиксированными по давлению границами (для всех газовых компонент, кроме  $\text{H}_2\text{O}$ ); деление атмосферы на слои с границами, зависящими от вертикального распределения  $\text{H}_2\text{O}$  (с сохранением фиксированного количества поглотителя в слоях от текущего уровня  $j$  до ВГА).

Последний способ применяется при расчетах функции пропускания в отдельных каналах AIRS с сильным поглощением водяным паром.

#### **MPP-FRTM [Trotsenko, et al., 2001]**

К классу быстрых радиационных моделей с некоторыми ограничениями по вычислительной эффективности может быть отнесен комплекс MPP-FRTM, разработанный специально для тематической обработки измерений ИК-зондировщика IASI. MPP-FRTM использует так называемую таблично-интерполяционную методику (Look-up Table Interpolation (LTI) technique) описания атмосферного поглощения, которая широко применяется в более «физически точных», по сравнению с RTTOV, RTIASI, SARTA, радиационных моделях типа KCARTA и 4A. В то же время, отличительной особенностью MPP-FRTM является возможность обеспечения различных уровней соотношения «производительность–гибкость» в соответствии с требованиями конкретных задач тематической обработки. Наряду с техникой LTI в радиационной модели MPP-FRTM для ускорения расчетов используются эффективные алгоритмы коррекции регрессионного типа. Важно отметить, что методические усовершенствования техники LTI, используемые в MPP-FRTM, были тщательно верифицированы на основе сопоставления с данными хорошо контролируемых натуральных (прежде всего, самолетных) измерений высокого спектрального разрешения. В данном коде используется фойгтовский контур линий поглощения, различные типы континуального поглощения, интерференции линий.

#### **Код LBLRTM [Clough and Iacono, 1995]**

Программа осуществляет расчеты функций пропускания, спектров интенсивностей теплового излучения и соответствующих яркостных температур излучения в широкой спектральной области от УФ до субмиллиметровых длин волн. Для описания формы спектральных линий используется контур Фойгта. При описании континуального поглощения водяного пара учитываются механизмы как собственного, так и постороннего уширения, а также — континуальные поглощения кислорода, азота и углекислого газа. В расчетах используются данные по тонкой структуре HITRAN, включая учет сдвига центров линий, интерференцию спектральных линий CO<sub>2</sub>, температурные зависимости полуширин и самоуширение в линиях водяного пара. Зависимость интенсивностей линий учитывается с помощью программы Total Internal Partition Function (TIPS). Поглощение ряда молекул (например, галоид–углеродов) учитывается с помощью коэффициентов поглощения, зависящих от температуры. По оценкам авторов программы точность программы составляет около 0.5%, а вычислительные погрешности примерно в 5 раз меньше. Важнейшими факторами, ограничивающими точность расчетов, являются погрешности параметров тонкой структуры. Высокая вычислительная эффективность кода позволяет рассчитывать интегральные потоки и скорости радиационного измерения температуры. Для моделирования измерений можно использовать 9 различных типов спектральных аппаратных приборных функций. В расчетах используется реалистические модели излучательной способности водной поверхности. Программа постоянно валидируется на основе сравнений с измерениями спектров излучения атмосферы от УФ до субмиллиметровых длин волн.

### **Программа KOPRA [Stiller, et al., 2002]**

Эта программа — код прямого расчета (line-by-line) радиационных характеристик. Наряду с расчетом интенсивности излучения, программа рассчитывает производные интенсивности по атмосферным параметрам. Расчет коэффициентов поглощения и интегрирование производятся на оптимизированной внутренней неэквидистантной сетке частот. В программе предусмотрен учет рефракции, несферичности Земли, эффекта интерференции спектральных линий, эффекта нарушения ЛТР по колебательным, вращательным и спиновым состояниям. Программа разработана для интерпретации данных, полученных аппаратурой MIPAS на спутнике ENVISAT, но также использовалась для анализа ИК спектров высокого разрешения, полученных наземным и самолетным аналогом аппаратуры — прибором MIPAS-STR.

### **Программа RFM [Saunders, et al., 1999]**

Основной целью при создании этой программы было проведение эталонных спектральных расчетов для прибора MIPAS. Однако, со временем программа превратилась в инструмент "общего назначения" (general purpose), применимый к большому числу спектроскопических приложений. Поскольку программа предназначалась для тестирования различных приближений и упрощений, используемых в оперативных расчетах излучения для прибора MIPAS, важной характеристикой программы является возможность выбора различных алгоритмов расчетов. При создании программы за основу был взят код GENLN2, однако существуют различия в архитектуре этих программ. Дальнейшее развитие кода описано в работе [Dudhia, 2016 (in press)]. Код позволяет осуществлять расчеты в сферической и плоскопараллельной моделях, для однородных путей, учитывать аппаратные функции приборов, интерференцию линий  $\text{CO}_2$ , вклад континуумов поглощения  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$  и  $\text{CO}_2$ , неравновесность атмосферы, линии и полосы различных изотопов. Осуществляются также расчеты производных излучения по различным параметрам атмосферы, моделируются наблюдения из космоса, с самолетов, аэростатов, с земли. Код предназначен для расчетов функций пропускания, интенсивностей и потоков излучения в ИК и МКВ областях спектра, коэффициентов поглощения, радиационных изменений температуры, оптических толщин, яркостных температур излучения. Производится учет горизонтальной неоднородности атмосферы.

### **Программа SPIRT [Косцов, 2008]**

Программа расчета ИК уходящего излучения на касательных трассах была разработана для интерпретации измерений приборов CRISTA [Grossmann, et al., 2002]. Программа позволяет рассчитывать интенсивности уходящего ИК излучения горизонта планеты, в том числе для неравновесной атмосферы, а также производные интенсивности по различным параметрам атмосферы.

## **8.4. Примеры сравнений радиационных кодов**

Наличие большого количества различных радиационных кодов сделало актуальным их сравнения, а также сравнения расчетов с экспериментальными данными.

В качестве примера сопоставлений укажем на работу, где приведены результаты сопоставлений программ расчета радиационных характеристик для неравновесной атмосферы [Clarmann, et al., 2002]. При сравнении программ использовались 2 группы сценариев тестовых расчетов: с высоким спектральным разрешением ( $0.01 \text{ см}^{-1}$ ) и средним спектральным разрешением ( $1.00 \text{ см}^{-1}$ ). В качестве спектральной аппаратной функции были взяты функции прямоугольной и треугольной формы. Спектральные интервалы, в которых проводились расчеты, даны в таблице 8.4. Рассматриваемый набор значений прицельных высот: 40, 60, 80, 100 км. Рассматривались следующие модели атмосферы: средние широты, день; средние широты, ночь; полярная зима; полярное лето. Эти модели включали в себя вертикальные профили температуры, давления, отношения смеси газов и колебательных температур различных колебательных состояний молекул. В расчетах учитывалось только спектральные линии углекислого газа и озона. Рефракция не учитывалась. Форма Земли была взята сферической с радиусом 6367 км. Распределение атмосферных параметров предполагалось сферически симметричным. Интерференция спектральных линий не учитывалась. Для удобства анализа причин расхождений в расчетах, расчеты проводились как для случая нарушения ЛТР, так и для случая его выполнения.

Таблица 8.4. Спектральные интервалы тестовых расчетов при сопоставлении компьютерных программ.

Спектральное разрешение, $\text{см}^{-1}$	Спектральный интервал, $\text{см}^{-1}$
0.01	675.5—676.5
	967.0—968.0
1.00	640.0—680.0
	900.0—1100.0

Следует подчеркнуть, что не накладывалось никаких условий на разбиение атмосферы по слоям, на выбор шага интегрирования, монохроматической сетки по частоте, а также на выбор учитываемых спектральных линий, поскольку в каждой программе используется свой подход к оптимизации вычислений.

Для всех расчетов с высоким спектральным разрешением с аппаратной функцией прямоугольной формы были отмечены расхождения между спектрами, полученными программой GENLN2, и спектрами, полученными с помощью других программ. Эти расхождения не наблюдались при аппаратной функции треугольной формы. Этот пример показывает, насколько результаты чувствительны к вычислительным особенностям программ. Свертка спектра с прямоугольной аппаратной функцией, в частности в случае, когда ширина функции содержит нечетное число шагов монохроматической сетки по частоте, в зависимости от вычислительной реализации может приводить к наличию спектральных особенностей — артефактов. Ниже для случая с высоким спектральным разрешением будут рассматриваться только результаты расчетов с треугольной аппаратной функцией.

Сравнение показало наличие расхождений в крыльях линий, около центров линий, где наблюдается насыщение, а также расхождения с континуальным типом поведения. В спектральном интервале  $675.5\text{—}676.5 \text{ см}^{-1}$

характер расхождений одинаков для случаев ЛТР и НЛТР. В спектральном интервале  $967.0\text{—}968.0\text{ см}^{-1}$  наблюдаются особенности в характере расхождений в случае НЛТР по сравнению со случаем ЛТР.

Подробное рассмотрение результатов сопоставления программ SPIRT, KOPRA, GENLN2, RFM при расчетах неравновесного излучения проведено также в диссертации В.С. Косцова [Косцов, 2008].

Результаты сравнений трех радиационных кодов в ИК и МКВ областях спектра (ARTS, GARLIC и KOPRA), использующих прямое интегрирование (line-by-line) монохроматических величин применительно к спутниковому спектрометру HIRS (High resolution Infrared Radiation Sounder) приведены в работе [Schreiera, et al., 2013]. Различия между расчетами и экспериментом составляли в различных каналах прибора HIRS в терминах яркостной температуры уходящего излучения 1—4 К.

Сравнения 16 различных радиационных кодов для коротковолновой (солнечной) области спектра описано в работе [Rangasayi, et al., 2005]. Коды имели различное спектральное разрешение от прямого расчета (line-by-line) до достаточно грубого, которое, в частности, использовалось в расчетах для моделей общей циркуляции атмосферы. При сравнениях сравнивались разные характеристики поля излучения — потоки прямого и рассеянного солнечного излучения на поверхности, потоки отраженного солнечного излучения на поверхности, потоки уходящего излучения и т.д. Рассмотрены разные варианты расчетов — чисто молекулярная атмосфера, атмосфера с аэрозолем и простыми моделями однородных облаков. Для чисто молекулярной безоблачной с малым содержанием водяного пара атмосферы согласие всех радиационных кодов лежит в пределах 1% для прямого солнечного излучения на поверхности. Для модели атмосферы с большой влажностью отличия достигают 5%. Сравнения величин поглощения солнечного излучения в атмосфере показывает наличие расхождений между различными радиационными кодами в 3% для сухой и 10% для влажной атмосферы. Учет аэрозолей увеличивает расхождения между различными кодами. Потоки рассеянного солнечного излучения на поверхности для всех радиационных кодов превышают данные измерений.

Сравнения двух алгоритмов расчета функций пропускания и оптических толщин ODAS и ODPS в радиационном коде Community Radiative Transfer Model (CRTM) версия 2 обнаружили заметные отличия в расчетах яркостных температур для трех ИК каналов спутникового прибора AVHRR (Advanced Very High Resolution Radiometer's) [Chen, et al., 2012]. Например, для канала 3 прибора эти отличия зависят от зенитного угла наблюдений и обусловлены использованием модели плоско параллельной атмосферы в алгоритме ODAS. В четвертом и 5 каналах прибора отличия обусловлены как использованием плоскопараллельной модели, так и разными аппроксимациями при учете молекулярного поглощения.

В работе [Loughman, et al., 2004] проведено сравнение различных кодов для сферической модели атмосферы и наблюдений рассеянного солнечного излучения горизонта планеты. Сравнивались 6 радиационных кодов для различных условий измерений. Учитывалось молекулярное и аэрозольное рассеяния и поглощение озона. Проведено также сравнения между расчетами и измерениями спутниковых приборов SOLSE и LORE. При сравнения расчетов в приближении однократного рассеяния отличия составляли около 1%. При расчетах многократного рассеяния эти отличия возрастали до 2—4% для сферической модели атмосферы. Учет сферичности атмосферы с помощью

приближенных подходов приводил к завышению значений рассеянного излучения горизонта, увеличивающегося с ростом прицельных высот и достигающего 8% на высоте 60 км. Отличия между расчетами для различных радиационных кодов увеличивались при возрастании альbedo поверхности Земли.

Отметим в заключение, что систематические сравнения различных радиационных кодов проводятся в рамках международных рабочих групп — ICRCCM (Intercomparison of Radiation Codes in Climate Models) и CIRC (Continual Intercomparison of Radiation Codes [<http://circ.gsfc.nasa.gov/>]) [Oreopoulos, et al., 2012].

## Приложения

### Приложение 1. Алгоритм поиска интервала в упорядоченном массиве

Выдает номер интервала в упорядоченном массиве, внутри которого лежит заданное число. Если заданное число меньше первого элемента массива – выдается первый интервал, если больше последнего элемента – последний интервал. Замечательным свойством этого алгоритма является то, что какое бы ни было заданное число, он всегда выдает номер интервала, непосредственно пригодного для (линейной) интерполяции или экстраполяции.

Алгоритм основан на делении интервала поиска пополам (метод “вилки”, дихотомия).

#### Входные данные

- 1) Массив  $Y_i$ ,  $i=1, \dots, N$ ,  $N \geq 2$ . Должен быть упорядочен в возрастающем или убывающем порядке (не важно, в каком конкретно).
- 2) Число  $N$  элементов в массиве. Должно быть  $N \geq 2$ .
- 3) Значение  $x$ , для которого ищется номер интервала (формально может быть любое).

#### Выходные данные

- 1) Значение индекса  $i$  в массиве  $Y_i$ ,  $i=1, \dots, N$ , такое, что  $x$  лежит внутри интервала между  $Y_i$  и  $Y_{i+1}$  или  $i=1$ , если  $x$  вне интервала за его границей  $Y_1$ , или  $i=N-1$ , если  $x$  вне интервала за его границей  $Y_N$ . (Для возрастающего массива  $Y_i \leq x \leq Y_{i+1}$ , или  $i=1$ , если  $x < Y_1$ , или  $i=N-1$ , если  $x > Y_N$ ).

#### Операции алгоритма

- 1) Присваиваем  $k_1=1$ ,  $k_2=N$  (границы поиска). Если  $Y_1 < Y_N$ , то присваиваем  $l_1=1$ , иначе ( $Y_1 > Y_N$ ) присваиваем  $l_1=0$  (направление упорядоченности).
- 2) Вычисляем  $k_3 = \text{int}((k_1 + k_2)/2)$ , где  $\text{int}()$  – целая часть числа. Если  $k_3 = k_1$ , то переход на операцию 6) алгоритма.
- 3) Если  $x < Y_{k_3}$ , то присваиваем  $l_2=1$ , иначе ( $x \geq Y_{k_3}$ ), присваиваем  $l_2=0$  (направление упорядоченности).
- 4) Если  $l_2 = l_1$ , то присваиваем  $k_2 = k_3$ , иначе ( $l_2 \neq l_1$ ), присваиваем  $k_1 = k_3$ .
- 5) Переход на операцию 2) алгоритма.
- 6) Присваиваем  $i = k_3$ .
- 7) Конец алгоритма.

### Приложение 2. Алгоритмы вычисления функции Планка

Традиционный прием, позволяющий избегать вычислительных трудностей типа умножения большой величины на малую при вычислении функции Планка (1.3.5) состоит в переходе к безразмерным величинам.

### Через длину волны

Значение длины волны  $\lambda_m$ , при котором функция Планка (1.3.5) максимальна, получается путем численного решения уравнения  $xe^x/(e^x - 1) = 5$ , где  $x = \frac{c_2}{\lambda T}$ , а корень  $x_\lambda$  равен 4.965114. Это приводит к известному закону смещения Вина [2]

$$\lambda_m = c_\lambda / T,$$

где  $c_\lambda = c_2 / x_\lambda$ . Вводя подстановку  $\xi = \lambda / \lambda_m$ , переходим к безразмерной функции Планка

$$\eta_\lambda(\xi) = \frac{1}{\xi^5} \frac{1}{\exp(x_\lambda / \xi) - 1}. \quad (\text{П2.1})$$

Окончательно

$$B_e(\lambda, T) = \frac{2x_\lambda^5 k_B^2}{hc_2^3} T^5 \eta_\lambda(\xi), \quad (\text{П2.2})$$

где  $k_B$  – постоянная Больцмана.

### Через волновое число

Для волнового числа  $\nu$  [2], рассматривая подстановку  $x = c_2 \nu / T$ , получаем уравнение  $xe^x/(e^x - 1) = 3$  с корнем  $x_\nu = 2.821439$  и закон смещения Вина

$$\nu_m = c_\nu T, \quad (\text{П2.3})$$

где  $c_\nu = x_\nu / c_2$ . Вводя подстановку  $\xi = \nu / \nu_m$ , переходим к безразмерной функции Планка

$$\eta_\nu(\xi) = \frac{\xi^3}{\exp(x_\nu \xi) - 1} \quad (\text{П2.4})$$

и

$$B_e(\nu, T) = \frac{2x_\nu^3 k_B^2}{hc_2} T^3 \eta_\nu(\xi). \quad (\text{П2.5})$$

### Через частоту

Для частоты  $f$  [2], все аналогично, подстановка  $x = hf / k_B T$ , закон смещения Вина

$$f_m = c_f T, \quad (\text{П2.6})$$

где  $c_f = x_\nu k_B / h$ . Подстановка  $\xi = f / f_m$  дает безразмерную функцию Планка, такую же как для волнового числа  $\eta_f(\xi) \equiv \eta_\nu(\nu)$  и итоговое выражение

$$B_e(f, T) = \frac{2x_\nu^3 k_B}{c_2^2} T^3 \eta_\nu(\xi). \quad (\text{П2.7})$$

### Приближения функции Планка

В коротковолновой области – формула Вина, которую также проще всего использовать через приведенные выше безразмерные записи. Для длины волны при  $\xi \ll 1$ , а для волнового числа и частоты при  $\xi \gg 1$  имеем

$$\eta_\lambda(\xi) = \xi^{-5} \exp(-x_\lambda / \xi), \quad (\text{П2.8})$$



$$\eta_v(\xi) = \xi^3 \exp(-x_v \xi). \quad (\text{П2.9})$$

В длинноволновой области – формула Релея-Джинса, не требующая вычислительных ухищрений:

$$I_e(\lambda, T) = \frac{2k_B T c}{\lambda^4}, \quad (\text{П2.10})$$

$$I_e(\nu, T) = 2k_B T c \nu^2, \quad (\text{П2.11})$$

$$I_e(f, T) = \frac{2k_B T f^2}{c^2}. \quad (\text{П2.12})$$

### Приложение 3. Полный алгоритм расчета интенсивности монохроматического теплового излучения

Это модификация алгоритма, приведенного в разделе 1.3, с добавлением автоматического построения внутренней сетки интегрирования.

#### Исходные данные

Заданы: зенитный угол излучения  $\vartheta$ , высота  $z$ , длина волны излучения  $\lambda$  вертикальные профили объемного коэффициента поглощения и температуры  $k_i(\lambda, z_i)$ ,  $T_i(z_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $z_1 = z_0$ ,  $z_N = z_\infty$ , внеатмосферная интенсивность  $I_\lambda(z_\infty)$ , возможно, равная нулю.

#### Параметры расчета

Заданы: максимально допустимая разность функций пропускания  $\Delta P_{\max}$ , минимально значимое значение функции пропускания  $P_{\min}$ ,

#### Вычислить

Интенсивность монохроматического теплового излучения  $I_\lambda(z, \vartheta)$ .

#### Операции алгоритма

1) Вычисляем максимально допустимую оптическую толщину слоя (1.3.10)  $\Delta \tau_{\max} = -\cos \vartheta \ln(1 - \Delta P_{\max})$ .

2) Определяем (см. Приложение 1) номер  $i$  для которого  $z_i \leq z < z_{i+1}$ .

3) Находим значение  $T(z)$  по выбранной кусочной аппроксимации профиля температуры (формулы (1.2.15)-(1.2.17) с заменой  $\alpha$  на  $T$ ).

4) Присваиваем  $B^{(1)} = B_e(\lambda, T(z))$ ,  $I^{(1)} = B^{(1)}/2$ ,  $\tau^{(1)} = 0$ ,  $P^{(1)} = 1$ .

5) Начало цикла по уровням внешней сетки  $j = i + 1, \dots, N$ .

6) Вычисляем  $\tau(z_j, z_{j-1})$ , учитывая  $\tau(z_{i+1}, z_i) \equiv \tau(z_{i+1}, z)$ , по выбранной кусочно-линейной аппроксимации профиля объемного коэффициента поглощения (1.2.15)-(1.2.17).

7) Если  $\tau(z_j, z_{j-1}) > \Delta \tau_{\max}$  – переход на операцию 9) алгоритма.

8) (Случай  $\tau(z_j, z_{j-1}) \leq \Delta \tau_{\max}$ ). Вычисляем  $\tau^{(2)} = \tau^{(1)} + \tau(z_j, z_{j-1})$ ,  $P^{(2)} = \exp(-\tau^{(2)} / \cos \vartheta)$ ,  $B^{(2)} = B_e(\lambda, T(z_j))$ . Суммируем  $I^{(2)} = I^{(1)} + B^{(2)} P^{(1)} / 2$ . Если  $P^{(2)} < P_{\min}$ , полагаем  $P^{(2)} = 0$ ,  $I = I^{(2)}$  и переходим на операцию 14) алгоритма. Иначе ( $P^{(2)} \geq P_{\min}$ ) суммируем  $I^{(3)} = I^{(2)} - B^{(1)} P^{(2)} / 2$ , присваиваем  $\tau^{(1)} = \tau^{(2)}$ ,  $P^{(1)} = P^{(2)}$ ,  $B^{(1)} = B^{(2)}$ ,  $I^{(1)} = I^{(3)}$  и переходим на операцию 12) алгоритма.

9) (Случай  $\tau(z_j, z_{j-1}) > \Delta\tau_{\max}$ ). Вычисляем число вставляемых высотных уровней  $M = \text{int}(\tau(z_j, z_{j-1}) / \Delta\tau_{\max})$ , где  $\text{int}()$  – целая часть числа. Вычисляем шаг по высоте  $\Delta z = (z_j - z_{j-1}) / (M + 1)$ , с учетом  $z_i = z$  и оптической толщине  $\Delta\tau = \tau(z_j, z_{j-1}) / M$ .

10) В цикле вставляемых уровней  $m = 1, \dots, M + 1$  вычисляем  $z_m = z_{j-1} + m\Delta z$ , ( $z_{M+1} = z_j$ ) с учетом  $z_i = z$ ,  $T(z_m)$  по алгоритму операции 3),  $\tau_m = \tau^{(1)} + m\Delta\tau$ ,  $P_m = \exp(-\tau_m / \cos \vartheta)$ ,  $B_m = B_e(\lambda, T(z_m))$ . Суммируем  $I_m^{(1)} = I_{m-1} + B_m P_{m-1} / 2$ , с учетом  $I_{m=0} = I^{(1)}$ ,  $P_{m=0} = P^{(1)}$ . Если  $P_m < P_{\min}$ , полагаем  $I = I_m^{(1)}$ ,  $P^{(2)} = 0$  и переходим на операцию 14) алгоритма. Иначе ( $P_m \geq P_{\min}$ ) суммируем  $I_m = I_m^{(1)} - B_{m-1} P_m / 2$ , с учетом  $B_{m=0} = B^{(1)}$ .

11) Присваиваем (по окончании цикла вставляемых уровней)  $\tau_{M+1} = \tau^{(1)} + \tau(z_{j-1}, z_j)$ ,  $P^{(1)} = P_{M+1}$ ,  $B^{(1)} = B_{M+1}$ ,  $I^{(1)} = I_{M+1}$ ,  $\tau^{(1)} = \tau_{M+1}$ . (Переход на операцию 12) алгоритма).

12) Конец цикла по уровням внешней сетки (переход на очередную итерацию при  $j < N$  (операция 6) алгоритма с увеличением  $j$  на единицу), завершение итераций при  $j = N$ ).

13) Добавляем  $I = I^{(2)} - B^{(2)} P^{(2)} / 2 + I_\lambda(z_\infty) P^{(2)}$ .

14) Значение  $I$  есть искомая интенсивность  $I_\lambda(z, \vartheta)$ , значение  $P^{(2)}$  есть функция пропускания  $P_\lambda(z_\infty, z, \vartheta)$ .

#### Приложение 4. Вычисление интегральных экспонент

##### Интегральные экспоненты и некоторые их свойства

Интегральные экспоненты определяются соотношением (1.4.1)

$$E_n(x) = \int_0^1 y^{n-2} \exp(-x/y) dy. \quad (\text{П4.1})$$

Обычно приводят альтернативное определение

$$E_n(x) = \int_1^\infty y^{-n} \exp(-xy) dy, \quad (\text{П4.2})$$

из которого (П4.1) получается подстановкой  $y' = 1/y$ . Интегрирование (П4.1) по частям дает рекуррентное соотношение

$$(n-1)E_n(x) = e^{-x} - xE_{n-1}(x), \quad (\text{П4.3})$$

применяя которое, достаточно вычислять интегральную экспоненту при фиксированном  $n$ , конкретно, в нашем случае, при  $n = 3$ . В частности, для  $E_2(x)$  и  $E_1(x)$  имеем

$$E_2(x) = \frac{1}{x} (e^{-x} - 2E_3(x)),$$

$$E_1(x) = \frac{1}{x} (e^{-x} - E_2(x)). \quad (\text{П.4.4})$$

Отметим, что из (П4.1) и (П.4.3) следует, что

$$\frac{dE_n(x)}{dx} = -E_{n-1}(x) = \frac{1}{x}((n-1)E_n(x) - e^{-x}), \quad (\text{П4.5})$$

в частности,  $\frac{dE_3(x)}{dx} = -E_2(x)$ .

#### Асимптотики интегральных экспонент

Определенную сложность при практических вычислениях интегральных экспонент представляет область малых аргументов  $x \rightarrow 0$ . Получим для этих случаев асимптотические формулы.

Для нашей базовой функции  $E_3(x)$ , воспользовавшись асимптотикой  $\exp(-x/y) \approx 1 - x/y$ , получаем

$$E_3(x)_{x \rightarrow 0} \rightarrow 1/2 - x. \quad (\text{П4.6})$$

Отметим, что этот результат полностью согласуется с физическим смыслом  $E_3(x)$  – см. первое слагаемое соотношения (1.4.2) и формулу (1.4.3) – поток внешнего излучения на верхней границе атмосферы (при  $\tau_\lambda = 0$ ) равен  $\pi I_\lambda(z_\infty)$ , а далее уменьшается с ростом  $\tau_\lambda$ .

Поскольку остальные функции  $E_n(x)$  будут вычисляться через  $E_3(x)$  по рекуррентным соотношениям, для согласования с (П4.6), получим соответствующие асимптотики именно через эти соотношения.

При  $n \geq 3$  из (П4.3) имеем

$$E_n(x)_{x \rightarrow 0} \rightarrow \frac{1}{n-1} \left( 1 - x - \frac{x}{n-2} \right). \quad (\text{П4.7})$$

Для  $E_2(x)$  членов первого порядка не остается, следовательно

$$E_2(x)_{x \rightarrow 0} \rightarrow 1. \quad (\text{П4.8})$$

Это опять же согласуется с физическим смыслом функции  $E_2(x)$  как диффузной функции пропускания (см. комментарий к соотношениям (1.4.2), (1.4.3) и [1,2]).

Особые проблемы возникают с функцией  $E_1(x)$ , поскольку она стремится к бесконечности при  $x \rightarrow 0$ . Известно [11] асимптотическое разложение для  $E_1(x)$

$$E_1(x)_{x \rightarrow 0} \rightarrow -0.5772 - \ln x + x, \quad (\text{П4.9})$$

но оно не может нам помочь, так как по-прежнему выдаст бесконечность для нулевого  $x$ . Для согласования с нашим подходом и чтобы избежать бесконечности, будем просто считать, что, аналогично (П4.8) для  $E_2(x)$ , функция  $E_1(x)$  станет константой в области применения асимптотик. То есть, если  $x \geq x_{\min}$ , то  $E_1(x)$  вычисляется через  $E_3(x)$  по (П4.4), иначе, при  $x < x_{\min}$ ,  $E_1(x)$  также вычисляется через  $E_3(x)$  по (П4.4) но уже при  $x = x_{\min}$ . Обоснование такого вычислительного приема приведено в разделе 3.1.

В качестве границы применения асимптотических формул (П4.6)-(П4.8), подобранной в ходе практических расчетов, рекомендуется  $x < 0.001$ . Для  $E_1(x)$  сравнением с таблицей в [11] и формулой (П4.9) подобрано значение  $x_{\min} = 0.0015$ . Отметим, что все вычисления интегральных экспонент, в том числе в приводимом ниже алгоритме для  $E_3(x)$ , следует вести с двойной точностью.

### Выражение $E_3(x)$ через неполную гамма-функцию

Для вычисления  $E_3(x)$  выразим ее через неполную гамма-функцию, алгоритм расчета которой многократно проверен и опробован. Неполная гамма-функция по определению есть

$$\Gamma(x, y) = \int_y^{+\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt. \quad (\text{П4.10})$$

Тогда из (П4.2), вводя для  $\Gamma(-2, y)$  подстановку  $t = xy$  получаем

$$E_3(x) = x^2 \Gamma(-2, x). \quad (\text{П4.11})$$

При  $x \geq 0.001$  функция  $E_3(x)$  вычисляется по (П4.11), при  $x < 0.001$  – по (П4.6).

### Вычисление неполной гамма-функции $\Gamma(x, y)$

Это модифицированный алгоритм из [5].

Если  $y \geq g$ , где  $g$  – некоторое разделяющее типы вычислений значение, выбор которого обсуждается ниже, то  $\Gamma(x, y) = \exp(-y) y^x / D(x, y)$ , где вспомогательная функция  $D(x, y)$  вычисляется через непрерывную дробь.

Для непрерывных (цепных) дробей введем удобное обозначение

$$c_0 + \frac{d_1}{c_1 + \frac{d_2}{c_2 + \frac{d_3}{c_3 + \dots}}} \equiv c_0 + \prod_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{c_j} \quad (\text{П4.12})$$

Для практического вычисления (П4.12) используется известный алгоритм

$$\begin{aligned} c_0 + \prod_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{c_j} &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{P_j}{Q_j}, \\ P_j &= c_j P_{j-1} + d_j P_{j-2}, P_{-1} = 1, P_0 = c_0, \\ Q_j &= c_j Q_{j-1} + d_j Q_{j-2}, Q_{-1} = 0, Q_0 = 1. \end{aligned} \quad (\text{П4.13})$$

В данном случае мы имеем  $D(x, y) \equiv c_0 + \prod_{j=1}^{\infty} \frac{d_j}{c_j}$ , где  $c_0 = y$ ,  $d_j = (j+1)/2 - x$ ,

если  $j$  нечетное и  $d_j = j/2$ , если  $j$  четное,  $c_j = 1$ , если  $j$  нечетное и  $c_j = y$ , если  $j$  четное. Итерации при вычислении непрерывной дроби прекращаются, когда ее значения, вычисленные на двух соседних, отличаются менее чем на некоторую на малую величину (конкретно  $10^{-6}$ ). Следует учесть, что при целых положительных  $x$  дробь конечна и обрывается, как только  $d_j$  обращается в нуль.

Если  $y < g$ , то  $\Gamma(x, y) = F(x, g) - F(x, y) + \Gamma(x, g)$ , где вспомогательная

функция  $F(x, t)$  вычисляется как сумма ряда  $F(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i t^{x+i}}{(x+i)!}$ , причем, если

$x+i=0$ , то соответствующий член ряда заменяется на  $\frac{(-1)^i \ln t}{i!}$ . Суммирование ведется до тех пор, пока при  $x+i > 0$  член ряда остается большим, чем некоторая величина (конкретно  $10^{-6}$ ).

В исходной версии алгоритма [5] в качестве значения параметра, разделяющего типы вычислений, предложено  $g = 0.3$ . Однако, как показал опыт, при больших значениях  $x$  непрерывная дробь  $D(x, y)$ , на которую

производится операция деления, может стать недопустимо малой. Поэтому предлагается следующая модификация алгоритма: при вычислениях непрерывной дроби анализируется значение  $D(x, y)$  и если оно становится меньше заданного значения (конкретно  $10^{-8}$ ), то вычисления прерываются и начинаются сначала при увеличенном значении параметра  $g$ . Такой прием позволил существенно расширить область устойчивой работы алгоритма по переменной  $x$ . Впрочем, для вычисления интегральных экспонент область больших  $x$  несущественна, поскольку для них, согласно (П4.11) всегда  $x = -2$ .

## Приложение 5. Квадратурная формула Гаусса

Формула Гаусса с  $N$  узлами обеспечивает точное интегрирование полиномов степени  $2N-1$  и ниже. В справочной математической литературе приведены наборы узлов и весов формулы Гаусса для конкретных небольших значений  $N$ . Однако, несложно снять эти ограничения и вычислить узлы и веса для любого заданного  $N$ , что и реализовано в данном алгоритме.

Алгоритм формулы Гаусса излагается по [5]. Изначально имеем

$$\int_a^b u(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^N w_k u(x_k), \quad x_k = y_k \frac{b-a}{2} + \frac{b+a}{2}, \quad (\text{П5.1})$$

где  $y_k$  – корни полинома Лежандра  $P_N(x)$  степени  $N$  (все они вещественные и лежат на интервале  $[-1, 1]$ ),

$$w_k = \frac{2}{(1-y_k^2)(P_N'(y_k))^2}, \quad (\text{П5.2})$$

где  $P_N'(x)$  – производные от полиномов Лежандра.

Узлы интегрирования симметричны относительно точки  $(a+b)/2$ , поэтому для практических расчетов формула (П5.1) переписывается в виде

$$\int_a^b u(x) dx \approx \begin{cases} \frac{b-a}{2} \left( \sum_{k=1}^{N/2} w_k u(x_k^+) + \sum_{k=1}^{N/2} w_k u(x_k^-) \right), & \text{при четных } N, \\ \frac{b-a}{2} \left( \sum_{k=2}^{(N+1)/2} w_k u(x_k^+) + \sum_{k=2}^{(N+1)/2} w_k u(x_k^-) + \frac{2}{(P_N'(0))^2} u\left(\frac{a+b}{2}\right) \right), & \text{при нечетных } N, \end{cases}$$

$$x_k^+ = \frac{b+a}{2} + y_k \frac{b-a}{2}, \quad x_k^- = \frac{b+a}{2} - y_k \frac{b-a}{2}, \quad y_k > 0. \quad (\text{П5.3})$$

Вычисление положительных корней полиномов Лежандра  $y_k$  производится по рекуррентной процедуре. Обозначим  $y_{k,j}^n$  –  $j$ -е приближение положительного корня с порядковым номером  $k$  от полинома степени  $n$ . В начале

$$y_{k,1}^n = \cos\left(\frac{(2k-1/2)\pi}{2n+1}\right), \quad k=1, \dots, \text{int}(n/2), \quad (\text{П5.4})$$

где  $\text{int}()$  – целая часть числа. Формула (П5.4) является асимптотической при  $n \rightarrow \infty$ , она может быть легко получена из общей асимптотической формулы для присоединенных функций Лежандра [6] (в [5] – опечатка). Дальнейшие итерации осуществляются по классической формуле Ньютона

$$y_{k,j+1}^n = y_{k,j}^n - \frac{P_n(y_{k,j}^n)}{P_n'(y_{k,j}^n)}. \quad (\text{П5.5})$$

В [5] утверждается, что достаточно трех итераций, т.е. в качестве окончательного значения  $y_k$  следует брать  $y_{k,4}^n$ , что подтвердила практическая реализация алгоритма при использовании иного критерия – близости к нулю значения полинома  $P_n(y_{k,j}^n)$ .

Вычислять значения полиномов Лежандра и их производных для (П5.2), (П5.3), (П5.5) в [5] рекомендовано по стандартным рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x), \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \\ P_n'(x) &= P_{n-2}'(x) + (2n-1)P_{n-1}(x), \quad P_0'(x) = 0, \quad P_1'(x) = 1. \end{aligned} \quad (\text{П5.6})$$

## Приложение 6. Полиномы и присоединенные функции Лежандра

### Полиномы Лежандра

Определяются соотношением (2.2.1) раздела 2.2. Главным их свойством является ортогональность на интервале  $[-1,1]$  (2.2.2) и, как следствие, возможность разложения любой непрерывной на этом интервале функции в ряд по полиномам Лежандра (2.2.3), (2.2.4) – см раздел 2.2.

Для практических вычислений стандартно используется рекуррентная формула – первая из (П5.6), Приложение 5. При этом по (П5.6) выгодно сразу вычислять весь набор полиномов для заданного аргумента  $x$ , то есть  $P_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, M$ , где  $M$  – максимально требуемая степень полинома (см. раздел 2.2).

Из определения (2.2.1) можно получить явное выражение для полиномов Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\text{int}(n/2)} \frac{(-1)^k (2(n-k))!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}, \quad (\text{П6.1})$$

где  $\text{int}()$  – целая часть числа. Однако с вычислительной точки зрения, коэффициенты полиномов удобно также вычислять через рекуррентные соотношения. Обозначив их набор для полинома степени  $n$  как  $c_k(n)$ , то есть

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k(n) x^k \quad (\text{П6.2})$$

из рекуррентного соотношения (П5.6) легко получить

$$\begin{aligned} c_k(n) &= \frac{2n-1}{n} c_{k-1}(n-1) - \frac{n}{n-1} c_k(n-2), \quad k = 0, \dots, n, \\ c_{-1}(n-1) &= c_{n-1}(n-2) = c_n(n-2) = 0, \\ c_0(0) &= 1, \quad c_0(1) = 0, \quad c_1(1) = 1. \end{aligned} \quad (\text{П6.3})$$

Заметим, что по (П6.1) полином Лежандра с четным индексом содержит только четные степени, а с нечетным – только нечетные. Поэтому реально, если  $n$  четное, то в (П6.3)  $k = 0, 2, 4, \dots, n$ , а для  $k = 1, 3, \dots, n-1$  имеем  $c_k(n) = 0$ ; если  $n$  нечетное, наоборот, в (П6.3)  $k = 1, 3, \dots, n$  и  $c_k(n) = 0$  для  $k = 0, 2, 4, \dots, n-1$ .

Соотношения (П6.2), (П6.3) можно рассматривать как альтернативный стандартному подход к вычислениям полиномов Лежандра – сначала

рассчитываются коэффициенты полиномов, а потом, через них – значения для любого аргумента  $x$ .

Полином Лежандра степени  $n$  имеет  $n$  вещественных корней, причем все они лежат в интервале  $[-1,1]$  – см. Приложение 5. Следовательно, чем выше степень полинома, тем более осциллирующей функцией он является.

### Присоединенные функции Лежандра

Это функции  $P_j^m(x)$ , где  $m$  – верхний индекс, определяемые через производные от полиномов Лежандра по соотношению (2.2.6) – раздел 2.2. Отметим, что из определения следует, что присоединенные функции Лежандра с четными индексами – это полиномы, а с нечетными – произведения полиномов на  $\sqrt{1-x^2}$ .

Для практических вычислений присоединенных функций Лежандра используются рекуррентные формулы

$$P_{n+1}^m(x) = \frac{2n+1}{n-m+1} x P_n^m(x) - \frac{n+m}{n-m+1} P_{n-1}^m(x), \text{ где } 0 \leq m \leq n-1,$$

$$P_n^{m+2}(x) = 2(m+1) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} P_n^{m+1}(x) - (n(n+1) - m(m+1)) P_n^m(x),$$

где  $0 \leq m \leq n-2$ ,

$$P_n^0 = P_n(x), \quad P_1^1(x) = \sqrt{1-x^2}. \quad (\text{П6.4})$$

При этом, как и для полиномов Лежандра, для заданного значения  $x$  по (П6.4) удобно выдавать весь набор необходимых значений  $P_j^m(x)$ ,  $m=0, \dots, M$ ,  $j=m, \dots, M$ . При организации рекурсии по (П6.4) внешним циклом следует сделать цикл по индексу  $m$ , что соответствует порядку вычисления ряда разложения индикатрисы (2.2.7), (2.2.8). То есть для фиксированного  $m$ , из последовательности  $m=0, \dots, M$ , вычисляем  $P_j^m(x)$  по первой из формул (П6.4) для всех  $j=m, \dots, M$ , далее переходим к следующему значению  $m$  по второй формуле (П6.4). При такой организации вычислений, если получаемые значения присоединенных функций Лежандра для двух заданных аргументов сразу используются в сумме (2.2.8), в памяти компьютера достаточно хранить только функции двух предыдущих индексов  $j$ . Отметим, что согласно определению (2.2.6), при  $m > 0$  имеем  $P_j^m(1) = P_j^m(-1) = 0$ , потому деление на  $\sqrt{1-x^2}$  в (П6.4) вычислительных проблем не порождает.

## Приложение 7. Вычисление коэффициентов системы интегральных уравнений в методе сферических гармоник

### Задача расчета и пути ее решения

Согласно соотношению (3.1.3) раздела 3.1, необходимо определить набор коэффициентов полиномов  $q_{jl}^m(\eta') = \sum_{k=0}^{j+l} q_{jlk}^m(\eta')^k$ , являющихся произведениями присоединенных функций Лежандра (см. Приложение 6)  $q_{jl}^m(\eta') = P_j^m(\eta') P_l^m(\eta')$ .

В принципе, указанную задачу можно решить на базе явного соотношения для полиномов Лежандра (П6.1), путем учета изменения его коэффициентов после дифференцирования и перемножения полиномов. Обычно такой путь и используется в литературе. Однако, в результате для нахождения

каждого коэффициента полинома получается громоздкая двойная сумма со слагаемыми, содержащими нагромождения факториалов. Такие выражения очень сложно практически использовать, к тому же их громоздкость является серьезным источником ошибок программирования.

В данном пособии предлагается иной путь – не пытаться получить искомые коэффициенты в виде явных формул, а вычислить их алгоритмически, последовательно перемножая необходимые полиномы. Преимуществами такого подхода является простота элементарных операций алгоритмов, снижающая вероятность ошибок программирования, а также возможность получить искомые коэффициенты сразу для всего набора индексов (что не проблема при ресурсах памяти современных компьютеров). Что же касается скорости вычислений, то предлагаемый путь, при правильной организации расчетов, пожалуй, даже существенно быстрее, чем вычисления по явным формулам.

### **Алгебра полиномов**

Для реализации указанного подхода, получим выражения для коэффициентов полиномов при элементарных операциях с ними.

Пусть дан полином степени  $n$ . Обозначим его как  $S_n(\vec{a}, x) \equiv \sum_{k=0}^n a_k x^k$ , то есть будем рассматривать набор его коэффициентов  $a_k$ ,  $k=0, \dots, n$ , причем  $a_n \neq 0$  и допустимо  $n=0$ , как определяющий полином вектор  $\vec{a}$  из  $n+1$  чисел. Теперь легко расписать формулы элементарных операций с полиномами. (Нам реально понадобятся только умножение и дифференцирование, но, для полноты приведем все).

Сложение.  $S_l(\vec{c}, x) = S_n(\vec{a}, x) + S_m(\vec{b}, x)$ . Имеем  $l = \max(n, m)$ . Положим, для определенности,  $n \leq m$ . Тогда  $c_i = a_i + b_i$  при  $i=0, \dots, n$ ,  $c_i = b_i$  при  $i = n+1, \dots, m$ .

Умножение.  $S_l(\vec{c}, x) = S_n(\vec{a}, x)S_m(\vec{b}, x)$ . Имеем  $l = n + m$ . Пусть, для определенности,  $n \leq m$ . Тогда  $c_i = \sum_{k=0}^i a_{i-k} b_k$  при  $i=0, \dots, n$ ,  $c_i = \sum_{k=i-n}^{m, i-k \geq 0} a_{i-k} b_k$  при  $i = n+1, \dots, n+m$ . В последней сумме суммирование прекращается, как только получаем  $i-k < 0$ .

Дифференцирование.  $S_l(\vec{c}, x) = \frac{d}{dx} S_n(\vec{a}, x)$ . Имеем  $l = n-1$  и  $c_i = (i+1)a_{i+1}$ ,  $i=0, \dots, n-1$ .

Интегрирование.  $S_l(\vec{c}, x) = \int S_n(\vec{a}, x) dx$ . Имеем  $l = n+1$  и  $c_i = a_{i-1}/i$ ,  $i=1, \dots, n+1$ ,  $c_0$  – неопределенная константа.

### **Алгоритм расчета коэффициентов**

Дано: Значение  $M$ .

Найти: значения коэффициентов набора полиномов

$$q_{jl}^m(x) = P_j^m(x)P_l^m(x) = (1-x^2)^m \frac{d^m P_j(x)}{dx^m} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}, \quad \text{т.е.} \quad q_{jlk}^m, \quad \text{где} \quad m=0, \dots, M, \\ j = m, \dots, M, \quad l = m, \dots, M, \quad k = 0, \dots, j+l.$$

Отметим, во-первых, индексную симметрию  $q_{jlk}^m = q_{ljk}^m$ , позволяющую экономить память при размещении массива  $q_{jlk}^m$  в компьютере, во-вторых,



зависимость искомого набора  $q_{jlk}^m$  только от значения  $M$ , что делает возможным его однократный предварительный расчет для всего диапазона реально возможных  $M$  и хранения в виде базы данных.

Операции алгоритма.

1) Размещаем в памяти компьютера вспомогательные массивы для вычислений  $p_l(k)$ ,  $l=0, \dots, M$ ,  $k=0, \dots, l$ ;  $s_1(k)$ ,  $k=0, \dots, 2M$ ,  $s_2(k)$ ,  $k=0, 1, 2$ ,  $s_3(k)$ ,  $s_4(k)$ ,  $k=0, \dots, 2M$ . Отметим, что при операциях умножения полиномов можно существенно сократить время вычислений, используя в соответствующих циклах шаг равный не единице, а двойке – см. замечание к формуле (П6.3), поскольку (в данном конкретном алгоритме!) все полиномы с четными степенями имеют нулевые нечетные коэффициенты, а все полиномы с нечетными степенями – нулевые четные (следовательно и произведение полиномов содержит лишь четные степени, если сумма степеней сомножителей четная и лишь нечетные, если сумма степеней нечетная).

2) Получаем в массивах  $p_l(k)$ ,  $l=0, \dots, M$ ,  $k=0, \dots, l$  коэффициенты полиномов Лежандра  $P_l(x)$  по соотношениям (П6.3).

3) В двойном цикле по  $j=0, \dots, M$  и  $l=0, \dots, j$  находим коэффициенты произведения полиномов  $S_n(\vec{s}_3, x) = S_j(\vec{p}_j, x)S_l(\vec{p}_l, x)$ . Записываем их в массив результата для нулевого  $m$ :  $q_{jlk}^0 = q_{ljk}^0 = s_3(k)$ ,  $k=0, \dots, j+l$ , с учетом  $q_{jlk}^0 = q_{ljk}^0$  для  $l = j+1, \dots, M$ .

4) Присваиваем коэффициенты множителя  $(1-x^2)$ :  $s_2(0)=1$ ,  $s_2(1)=0$ ,  $s_2(2)=-1$ .

5) Начало цикла по  $m=1, \dots, M$ .

6) Дифференцируем полиномы Лежандра:  $p_l(k) := (k+1)p_l(k+1)$  (“:=” – оператор присваивания – см. раздел 2.3),  $k=0, \dots, l-1$ ,  $l=m, \dots, M$ . После дифференцирования степень полинома уменьшается на единицу, соответственно, массив с четными ненулевыми коэффициентами переходит в массив с нечетными ненулевыми и наоборот.

7) Если  $m=1$ , то присваиваем  $s_1(k) = s_2(k)$ ,  $k=0, 1, 2$ , иначе (если  $m > 1$ ), вычисляем произведение полиномов  $S_n(\vec{s}_3, x) = S_{2(m-1)}(\vec{s}_1, x)S_2(\vec{s}_2, x)$  и присваиваем  $s_1(k) = s_3(k)$ ,  $k=0, \dots, 2m$ . В этот массиве все нечетные коэффициенты – нули.

8) В двойном цикле по  $j=m, \dots, M$  и  $l=m, \dots, j$  сначала находим коэффициенты произведения полиномов  $S_n(\vec{s}_3, x) = S_{j-m}(\vec{p}_j, x)S_{l-m}(\vec{p}_l, x)$ , потом – коэффициенты произведения  $S_n(\vec{s}_4, x) = S_{j+l-2m}(\vec{s}_3, x)S_{2m}(\vec{s}_1, x)$ . Записываем в массив результата:  $q_{jlk}^m = q_{ljk}^m = s_4(k)$ ,  $k=0, \dots, j+l$ , с учетом  $q_{jlk}^m = q_{ljk}^m$  для  $l = j+1, \dots, M$ .

9) Конец цикла по  $m$  (переход на очередную итерацию при  $m < M$  (операция 6) алгоритма с увеличением  $m$  на единицу), завершение итераций при  $m = M$ ).

10) Конец вычислений – массив  $q_{jlk}^m$  заполнен.

## Приложение 8. Операции с матрицами

### Умножение нескольких матриц (в частности, вектора на произведение матриц)

Для перемножения трех и более матриц возникает соблазн написать единую операцию со множеством вложенных циклов. Ни в коем случае не стоит этого делать! Такая операция будет работать очень медленно (мягко сказано), что легко понять подсчитав общее число итераций вложенных циклов. Для быстрого перемножения матриц надо выполнять операции умножения последовательно, явно сохраняя промежуточные результаты. Если в конце матричного произведения стоит вектор (и в результате, соответственно, тоже получается вектор), то умножение надо выполнять справа налево, тогда промежуточным результатом всегда будет вектор. Покажем, что и в общем случае для сохранения промежуточных результатов при перемножении матриц требуется не более двух вспомогательных векторов.

Пусть матрица  $\mathbf{B}$  вычисляется как произведение  $n$  матриц

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \dots \mathbf{A}_n. \quad (\text{П8.1})$$

Распишем элементы матриц:  $\mathbf{A}_l \equiv (A_l)_{i(l)j(l)}$ ,  $i(l) = 1, \dots, N(l)$ ,  $j(l) = 1, \dots, M(l)$ ,  $l = 1, \dots, n$ . Размерности матриц в произведении согласованы:  $M(l) = N(l+1)$  (кроме случая  $l = n$ ). Запишем для компактности произведение (П8.1) в тензорных обозначениях, то есть опуская знаки суммирования и предполагая сумму по всем парам одинаковых соседних индексов

$$B_{i(1)j(n)} = (A_1)_{i(1)j(1)} (A_2)_{j(1)j(2)} (A_3)_{j(2)j(3)} \dots (A_n)_{j(n-1)j(n)}. \quad (\text{П8.2})$$

Возьмем столбец номер  $k$  матрицы  $\mathbf{A}_n$ , обозначим его, чтобы не путать зависимость от номера  $k$  с индексом элемента как  $(A_n)_{j(n-1)k}$  – это вектор из  $N(n) = M(n-1)$  элементов ( $j(n-1) = 1, \dots, M(n-1)$ ). Тогда

$$B_{i(1)k} = (A_1)_{i(1)j(1)} (A_2)_{j(1)j(2)} (A_3)_{j(2)j(3)} \dots (A_n)_{j(n-1)k}, \quad k = 1, \dots, M(n). \quad (\text{П8.3})$$

Таким образом, вычисление матричного произведения свелось к рассмотренному выше умножению вектора на произведение матриц (справа налево, всего-то  $M(n)$  раз, а если в конце произведения исходно вектор, то один раз). Размерность, необходимая для хранения в памяти этого вспомогательного вектора равна максимальной размерности сворачиваемого индекса, т.е.  $\max(M(l))$ ,  $l = 1, \dots, n-1$ . Если число сомножителей более трех, необходимы два таких вспомогательных вектора: один умножается на матрицу, в другом получается промежуточный результат, после чего присваиваем его первому вектору и т.д.

Хорошим тестом контроля операций перемножения матриц является следующее утверждение: при умножении вектора на матрицы глубина вложения циклов не должна превышать двух, при перемножении матриц – трех.

### Обращение (произвольной) матрицы методом Гаусса

Пусть имеется квадратная матрица  $\mathbf{A}$  порядка  $n$  с элементами  $a_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Матрица  $\mathbf{B}$  называется обратной к матрице  $\mathbf{A}$ , если их произведение есть единичная матрица  $\mathbf{AB} = \mathbf{1}$ . Обращение матрицы является взаимно обратным, если  $\mathbf{B}$  обратная к  $\mathbf{A}$ , то и  $\mathbf{A}$  обратная к  $\mathbf{B}$ :  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{1}$ .

Метод Гаусса обращения матрицы основан на теореме: если применить к строкам матрицы  $\mathbf{A}$  линейные преобразования, в результате которых матрица

станет единичной, то применение этих же преобразований к единичной матрице даст матрицу, обратную к  $\mathbf{A}$ .

Операции алгоритма:

1) Размещаем в памяти единичную матрицу  $\mathbf{B}$  порядка  $n$  с элементами  $b_{ij} = 0$ , если  $i \neq j$  и  $b_{ij} = 1$ , если  $i = j$ ;  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

2) Начало цикла итераций по  $k = 1, \dots, n$ .

3) Выбор максимального элемента. Если  $k < n$ , то находим номер строки  $j$ , где  $j = k + 1, \dots, n$ , для которого  $|a_{jk}|$  максимален. Если  $j \neq k$ , то меняем строки  $j$  и  $k$ , последовательным присваиванием  $s = a_{ji}$ ,  $a_{ji} = a_{ki}$ ,  $a_{ki} = s$ ,  $i = k, \dots, n$ . Аналогично (при  $k < n$  и  $j \neq k$ ) меняем строки матрицы  $\mathbf{B}$ :  $s = b_{ji}$ ,  $b_{ji} = b_{ki}$ ,  $b_{ki} = s$ ,  $i = 1, \dots, n$ . (Обратите внимание, это не опечатка, здесь и далее диапазон изменения индексов в матрицах  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  разный, матрица  $\mathbf{A}$  превращается в единичную и ее “ненулевое поле” сужается, а вот матрица  $\mathbf{B}$  сохраняет весь набор индексов).

4) Строки матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  преобразуем последовательным применением формул:  $a_{ki} := a_{ki} / a_{kk}$  (“:=” – операция присваивания, см. раздел 2.3),  $i = k, \dots, n$ ,  $b_{ki} := b_{ki} / a_{kk}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $a_{ij} := a_{ij} - a_{ik} a_{kj} / a_{kk}$ ,  $j = k, \dots, n$ ,  $b_{ij} := b_{ij} - b_{ik} a_{kj} / a_{kk}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $i = 1, \dots, n$ , но  $i \neq k$  (последний диапазон индекса  $i$  относится к обеим формулам и для  $a_{ij}$ , и для  $b_{ij}$ ).

5) Конец цикла по индексу  $k$ . Если  $k < n$  – переход к новой итерации – операции 3) алгоритма с увеличением  $k$  на единицу, если  $k = n$  – завершение итераций.

6) Конец вычислений. Результат – матрица  $\mathbf{B}$ , обратная к матрице  $\mathbf{A}$ .

#### **Треугольная (одномерная) форма симметричной матрицы**

Квадратная матрица  $\mathbf{A}$  размера  $n \times n$  называется симметричной (иногда пишут – симметрической), если для любых  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n$  выполняется равенство ее элементов  $a_{ij} = a_{ji}$ . Альтернативное определение: симметричной называется матрица, совпадающая со своей транспонированной  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$ .

Ниже до конца этого приложения речь пойдет только о симметричных матрицах.

Можно сократить почти вдвое память компьютера, необходимую для хранения симметричной матрицы, если учесть, что она полностью определяется своей нижней треугольной частью, т.е. элементами, лежащими на главной диагонали и ниже ее (элементами  $a_{ij}$  с  $j \leq i$ ). Эту треугольную матрицу можно хранить в виде линейного (одномерного) массива в последовательности:  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{33}$ , ... Число элементов в таком массиве  $n(n+1)/2$ . Пересчет индексов квадратной матрицы в индекс линейного массива осуществляется функцией

$$\text{ind}(i, j) = \begin{cases} i(i+1)/2 + j, & \text{если } i \geq j \\ j(j+1)/2 + i, & \text{если } i < j \end{cases} \quad (\text{П8.4})$$

#### **Обращение симметричной матрицы – метод квадратного корня**

Это специальный метод нахождения обратной матрицы для симметричных матриц (только для них). Для данного частного класса матриц он значительно более быстрый и устойчивый к погрешностям вычислений, чем

приведенный выше общий метод Гаусса. Замечательным свойством алгоритма данного метода является возможность реализации операции обращения матрицы в виде превращения исходной в обратную, не требующую размещения в памяти промежуточных результатов, за исключением, может быть, одного вектора. Для этого матрица должна быть организована как одномерный массив (см. выше).

Метод квадратного корня основан на представлении исходной симметричной матрицы в виде произведения некоторой треугольной матрицы на диагональную и транспонированную к ней  $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^*$ , в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & \dots & 0 \\ s_{12} & s_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{1n} & s_{2n} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{11} & \dots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \quad (\text{П8.5})$$

В (П8.5) величины  $\delta_1, \dots, \delta_n$  принимают значения  $+1$  или  $-1$ . Отметим, что индексация матриц в (П8.5) соответствует их развертке в одномерном массиве.

Из (П8.5) для ненулевых элементов матриц  $\mathbf{S}$  и  $\delta$ , после выписывания элементов матричного произведения в явном виде, вытекают (убедитесь в качестве упражнения) последовательные формулы:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \text{sign}(a_{11}), \quad s_{11} = \sqrt{|a_{11}|}, \quad s_{1j} = a_{1j}/s_{11}, \quad j=1, \dots, n, \\ t &= a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2, \quad \delta_i = \text{sign}(t), \quad s_{ii} = \sqrt{|t|}, \quad i=2, \dots, n, \\ s_{ji} &= \frac{1}{s_{ii}} \left( a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}s_{kj} \right), \quad i=3, \dots, n-1, \quad j=2, \dots, n, \end{aligned} \quad (\text{П8.6})$$

где  $\text{sign}(x)$  – знак числа ( $+1$ , для положительных чисел и  $-1$  для отрицательных, нулевые значения аргумента  $\text{sign}(x)$  в (П8.6) означают вырожденность матрицы – отсутствие обратной).

При практической реализации соотношений (П8.6) следует учесть два важных обстоятельства.

Во-первых, если вычислять элементы матрицы  $\mathbf{S}$  в порядке развертки линейного массива выбирая необходимую формулу из (П8.6) (первую для  $s_{11}$  и  $s_{12}$ , вторую для  $s_{22}$ , первую для  $s_{13}$ , третью для  $s_{23}$ , вторую для  $s_{33}$ , первую для  $s_{14}$ , третью для  $s_{24}$  и  $s_{34}$ , вторую для  $s_{44}$  и т.д.), то их можно записывать непосредственно на место элементов матрицы  $\mathbf{A}$  (тоже линейного массива) и, соответственно, извлекать в (П8.6) оттуда (то есть отдельный массив для матрицы  $\mathbf{S}$  не требуется). Тогда после выполнения всех соотношений (П8.6) исходная матрица  $\mathbf{A}$  превратится в матрицу  $\mathbf{S}$ .

Во-вторых, не обязательно сразу размещать в памяти вектор  $\delta$ . Очень часто в реальных задачах встречаются симметричные матрицы, у которых все значения  $\delta_i$  либо положительные (такие матрицы являются положительно определенными), либо отрицательные (отрицательно определенные). Тогда, запомнив в скалярной переменной значение  $\delta_1$ , можно проверять последующие  $\delta_i$  на совпадение с  $\delta_1$ . Если все прочие  $\delta_i, i=2, \dots, n$  равны  $\delta_1$ , то далее, в приводимой ниже формуле (П8.8) так и полагаем, иначе, при появлении  $\delta_i \neq \delta_1$ ,

размещаем массив  $\delta$  в памяти, присваиваем  $\delta_j = \delta_1$ , для  $j = 1, \dots, i-1$   $\delta_j = \delta_i$  для  $j = i$  и далее заполняем массив по формулам (П8.6).

Матрица, обратная  $\mathbf{S}$ , обозначим ее  $\mathbf{T}$ , является нижней треугольной, из условия  $\mathbf{TS} = \mathbf{1}$  для ее ненулевых элементов получаются следующие последовательные формулы

$$t_{ii} = 1/s_{ii}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$t_{ij} = -t_{ii} \sum_{k=i+1}^j s_{ik} t_{kj}, \quad i = j-1, \dots, 1, \quad j = n, \dots, 2. \quad (\text{П8.7})$$

И опять, если соблюдать последовательность индексов в (П8.7) (сначала вычислить главную диагональ, а затем вести развертку по столбцам, начиная с правого снизу вверх), можно непосредственно записывать элементы матрицы  $\mathbf{T}$  на место соответствующих элементов матрицы  $\mathbf{S}$ .

Наконец, матрица, обратная исходной  $\mathbf{A}$ , обозначим ее  $\mathbf{B}$ , получается как произведение  $\mathbf{B} = \mathbf{T}^* \mathbf{D}^{-1} \mathbf{T} = \mathbf{T} \mathbf{D} \mathbf{T}^*$ . То есть

$$b_{ji} = \sum_{k=i}^n t_{ki} \delta_k t_{jk}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, i. \quad (\text{П8.8})$$

Здесь вновь достаточно вычислять элементы матрицы  $\mathbf{B}$  в порядке линейного массива, помещая их на место элементов матрицы  $\mathbf{T}$ .

Окончательно, после работы алгоритма имеем вместо линейного массива матрицы  $\mathbf{A}$  массив обратной ей матрицы  $\mathbf{B}$ .

#### **Собственные числа и собственные вектора симметричной матрицы**

Пусть имеется квадратная матрица  $\mathbf{A}$  порядка  $n$ . Число  $\lambda$  называется собственным числом (собственным значением) матрицы  $\mathbf{A}$ , если существует такой ненулевой вектор  $\mathbf{X}$ , что  $\mathbf{AX} = \lambda \mathbf{X}$ . Вектор  $\mathbf{X}$  в этом случае является собственным вектором матрицы  $\mathbf{A}$ .

На множестве комплексных чисел любая матрица порядка  $n$  имеет ровно  $n$  собственных чисел (среди них могут быть кратные). Для вещественных чисел ситуация сложнее, однако симметричные матрицы также имеют равно  $n$  собственных чисел. Именно такие матрицы часто встречаются в практических задачах, в частности в МДО (раздел 3.2).

Самым быстрым алгоритмом нахождения собственных чисел и векторов симметричной матрицы является приводимый ниже метод скалярного произведения (альтернативные названия – метод вычитания, метод итераций). Именно он обычно используется в МДО. Однако, этот метод может давать неверные результаты в случае близких значений собственных чисел. Этого недостатка лишен классический метод вращений, однако он достаточно медленно работает. Тем не менее, приведем и его, хотя бы как возможность проверки правильности работы метода скалярного произведения на стадии отладки алгоритмов МДО. Можно рекомендовать комбинированный алгоритм – прекращение вычислений по методу скалярного произведения с переходом (для исходной матрицы) на метод вращений, если итерации первого медленно сходятся (не достигается условие прекращения после их заданного числа).

Главной вычислительной проблемой при нахождении собственных чисел и векторов является их существенная вычислительная погрешность. Особенно к ней чувствительны собственные числа с близкими к нулю значениями (а в МДО нужны все собственные числа, включая малые). Эта погрешность может приводить к ситуации, когда возникают отрицательные значения собственных чисел (которых в МДО быть не должно). Единственный выход в таком случае –

использование стандартного приема регуляризации. Рассмотрим вместо исходной матрицы  $\mathbf{A}$  матрицу  $\mathbf{A} + \beta \mathbf{1}$ , где  $\beta \geq 0$  – число,  $\mathbf{1}$  – единичная матрица. Если  $\beta = 0$ , то собственные числа  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A} + \beta \mathbf{1}$  совпадают. При наличии среди них отрицательных надо последовательно увеличивать значение  $\beta$ , начиная с близкого к нулю, пока отрицательные собственные числа матрицы  $\mathbf{A} + \beta \mathbf{1}$  не исчезнут. Соответствующий набор собственных чисел и векторов матрицы  $\mathbf{A} + \beta \mathbf{1}$  и приписывается исходной матрице  $\mathbf{A}$ .

#### **Нахождение собственных чисел и векторов симметричной матрицы – метод скалярного произведения (метод вычитания, метод итераций)**

Это быстрый метод, позволяющий вычислять собственные числа (и вектора) последовательно, начиная с максимальных по модулю собственных чисел. Впрочем, это преимущество (вычисление только заданного числа максимальных собственных чисел) для МДО несущественно, т.к. в МДО нужны все собственные числа и вектора. Метод скалярного произведения может давать неверные результаты при наличии близких по значению (кратных) собственных чисел.

В методе используется итерационное решение уравнения  $\mathbf{AX} = \lambda \mathbf{X}$ , скалярное произведение векторов, используемое в методе, определено стандартно как  $(\mathbf{XY}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

Итак, имеется симметричная матрица  $\mathbf{A}$  и требуется найти максимальное по модулю ее собственное число (для начала – одно).

Операции алгоритма:

1) Выбираем в качестве нулевого приближения вектор  $\mathbf{X}$ , все элементы которого равны единице, и число  $\lambda = 1$ .

2) Вычисляем вектор  $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$ .

3) Вычисляем отношение скалярных произведений  $t = (\mathbf{YY})/(\mathbf{XY})$ , затем присваиваем  $\mathbf{X} = \mathbf{Y} / \sqrt{(\mathbf{YY})}$ .

4) Проверяем условие прекращения итераций, сравнивая  $t$  и  $\lambda$ , например, как  $2 \frac{|t - \lambda|}{|t + \lambda|} < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заданный параметр точности (относительная

точность определения собственных чисел). Если условие выполнено, то конец вычислений – в качестве максимального собственного числа берется значение  $t$ , в качестве соответствующего ему собственного вектора –  $\mathbf{X}$ . Если условие не выполнено – полагаем  $\lambda = t$  и переходим на операцию 2) алгоритма.

Для последовательного вычисления собственных чисел и векторов, после вычисления каждого из них, матрица  $\mathbf{A}$  преобразуется по формуле  $a_{ij} := a_{ij} - \lambda x_i x_j$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, i$ . Новая матрица  $\mathbf{A}$  имеет те же собственные числа и вектора, что и матрица перед преобразованием, за исключением найденного максимального по модулю собственного числа, вместо которого появляется нулевое значение. Таким образом, проведя поиск максимального собственного числа и соответствующего ему вектора  $n$  раз, получаем весь набор собственных чисел и векторов исходной матрицы  $\mathbf{A}$ .

#### **Нахождение собственных чисел и векторов симметричной матрицы – метод вращений (Якоби)**

Этот метод более медленный, чем рассмотренный выше. Однако, он обладает двумя важными для рассматриваемого здесь МДО особенностями:

вычисляются сразу все собственные числа и вектора, метод не чувствителен к случаю наличия близких (кратных) собственных чисел.

Суть метода вращений – последовательное приведение исходной матрицы к диагональному виду путем преобразования координат – умножения на элементарные матрицы вращения  $\mathbf{T}_{ij}$ , т.е.  $\mathbf{A} := \mathbf{T}^* \mathbf{A} \mathbf{T}$ . Элементарная матрица вращения – единичная матрица, на которую “наложены” четыре элемента, образуемые двумя значениями  $c$  и  $s$  (косинусом и синусом угла вращения), стоящих на пересечении строк и столбцов с номерами  $i$  и  $j$ . Конкретно, элементы матрицы вращения есть  $t_{ii} = c$ ,  $t_{jj} = c$ ,  $t_{kk} = 1$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $k \neq i \neq j$ ;  $t_{ij} = -s$ ,  $t_{ji} = s$ ,  $t_{km} = 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $m = 1, \dots, n$ ,  $k \neq i$  и  $m \neq j$ ,  $k \neq j$  и  $m \neq i$ . Номера  $i$  и  $j$  на каждой итерации вращения выбираются из условия максимума модуля элемента вне главной диагонали  $a_{ij}$ . Угол вращения выбирается из требования минимизации суммы квадратов элементов вне главной диагонали матрицы  $\mathbf{A}$ , из чего следуют соотношения

$$c = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \right)}, \quad s = \text{sign}(p) \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \right)}, \quad (\text{П8.9})$$

где

$$p = \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}}. \quad (\text{П8.10})$$

Если  $a_{ii} = a_{jj}$ , то, как следует из (П8.9), (П8.10),  $c = 1/\sqrt{2}$ ,  $s = \text{sign}(a_{ij})/\sqrt{2}$ .

Формула вращения записывается в виде одновременно (то есть с полным вычислением левых частей и потом присвоения правым) применяемых соотношений

$$\begin{aligned} a_{ii} &:= ca_{ii} + sa_{jj}, \quad a_{jj} := ca_{jj} - sa_{ii}, \quad a_{li} := ca_{li} + sa_{lj}, \quad a_{lj} := ca_{lj} - sa_{li}, \\ l &= 1, \dots, n, \quad l \neq i \neq j; \\ a_{ii} &:= c(ca_{ii} + sa_{jj}) + s(ca_{ij} + sa_{ji}), \quad a_{ji} := c(ca_{ji} - sa_{ii}) + s(ca_{jj} - sa_{ij}), \\ a_{jj} &:= c(ca_{jj} + sa_{ii}) - s(ca_{ji} - sa_{ii}), \quad a_{ij} := c(ca_{ij} + sa_{jj}) - s(ca_{ii} + sa_{jj}), \end{aligned} \quad (\text{П8.11})$$

остальные элементы матрицы  $\mathbf{A}$  не меняются.

Итерации продолжаются, пока максимальный элемент вне главной диагонали по модулю не станет меньше заданного значения. После окончания итераций в качестве собственных чисел берутся диагональные элементы матрицы  $\mathbf{A}$ , а в качестве соответствующих им собственных векторов – столбцы матрицы  $\mathbf{T}$ , подсчитываемой на каждой итерации как  $\mathbf{T} := \mathbf{T} \mathbf{T}_{ij}$ , где начальное значение  $\mathbf{T}$  – единичная матрица. То есть на каждой итерации одновременно пересчитываем

$$t_{li} := ct_{li} + st_{lj}, \quad t_{lj} := ct_{lj} - st_{li}, \quad l = 1, \dots, n, \quad (\text{П8.12})$$

остальные элементы матрицы  $\mathbf{T}$  не меняются.

**Приложение 9. Решение системы уравнений для нахождения  
неопределенных констант интегрирования в методе дискретных ординат**

**Преобразование переменных**

Необходимо решить систему векторных уравнений (3.2.34) для определения  $2(N-1)$  неизвестных векторов  $\mathbf{w}_i^{(\pm)}$ ,  $i=1, \dots, N-1$ .

Для устойчивости решения избавимся в матрицах системы (3.2.34) от положительных экспонент, для чего перейдем к новым векторам и матрицам

$$\mathbf{v}_i^{(+)} = \mathbf{w}_i^{(+)} \exp(\sqrt{\omega_i} \tau_i), \quad \mathbf{v}_i^{(-)} = \mathbf{w}_i^{(-)}, \quad i=1, \dots, N-1, \quad (\text{П9.1})$$

$$\mathbf{R}_1^{(+)} = \mathbf{S}_1^{(+)} \mathbf{D}(\exp(-\sqrt{\omega_1} \tau_1)), \quad \mathbf{R}_1^{(-)} = \mathbf{S}_1^{(-)},$$

$$\mathbf{R}_i^{(\pm\pm)} = \mathbf{S}_i^{(\pm\pm)} \mathbf{D}(\exp(-\sqrt{\omega_i} \tau_i)), \quad \mathbf{R}_i^{(\pm-)} = \mathbf{S}_i^{(\pm-)}, \quad i=1, \dots, N-1,$$

$$\mathbf{R}_N^{(+)} = \mathbf{S}_N^{(+)} \mathbf{D}(\exp(-\sqrt{\omega_{N-1}} \tau_{N-1})), \quad \mathbf{R}_N^{(-)} = \mathbf{S}_N^{(-)} \quad (\text{П9.2})$$

То есть, согласно (П9.2), все столбцы соответствующих матриц умножаются на отрицательные экспоненты – сравните с формулами (3.2.35). Выпишем для удобства получившуюся систему уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1^{(+)} \mathbf{v}_1^{(+)} + \mathbf{R}_1^{(-)} \mathbf{v}_1^{(-)} &= \mathbf{t}_1, \\ \mathbf{R}_{i-1}^{(++)} \mathbf{v}_{i-1}^{(+)} + \mathbf{R}_{i-1}^{(+-)} \mathbf{v}_{i-1}^{(-)} + \mathbf{R}_i^{(++)} \mathbf{v}_i^{(+)} + \mathbf{R}_i^{(+-)} \mathbf{v}_i^{(-)} &= \mathbf{t}_i^{(+)}, \quad 1 < i < N, \\ \mathbf{R}_{i-1}^{(-+)} \mathbf{v}_{i-1}^{(+)} + \mathbf{R}_{i-1}^{(--)} \mathbf{v}_{i-1}^{(-)} + \mathbf{R}_i^{(-+)} \mathbf{v}_i^{(+)} + \mathbf{R}_i^{(--)} \mathbf{v}_i^{(-)} &= \mathbf{t}_i^{(-)}, \quad 1 < i < N, \\ \mathbf{R}_N^{(+)} \mathbf{v}_{N-1}^{(+)} + \mathbf{R}_N^{(-)} \mathbf{v}_{N-1}^{(-)} &= \mathbf{t}_N, \end{aligned} \quad (\text{П9.3})$$

**Метод решения**

Обратим внимание, что в первом (и последнем) уравнениях (П9.3) присутствуют только две искомые переменные. В следующих двух – они же, плюс две новые. В остальных (начиная с четвертого) уравнениях этих двух переменных из первого больше нет. Аналогично и для всех других пар переменных – каждая присутствует только в трех соседних уравнениях. Это позволяет применить для решения (П9.3) известный метод последовательных подстановок (прямого и обратного хода).

Решим первые два уравнения относительно двух переменных, присутствующих в первом, не обращая при этом внимание на наличие в левой части второго других неизвестных, т.е. фактически выразим переменные первого уравнения через переменные второго. Подставим получившееся решение в третье уравнение – в нем окажутся только две неизвестные переменные второго. Тогда следующая тройка уравнений (с третьего по пятое) вновь будет иметь тот же вид – первое уравнение только для двух переменных, два последующие – для четырех. С ней проделываем ту же процедуру. И так далее... В конце придем к ситуации, когда в последних двух уравнениях останутся только две неизвестные. Прямой ход окончен. Решаем последние два уравнения (уже “по-настоящему”), затем подставляем полученные значения в выражения через них предыдущих двух переменных и т.д. – обратный ход. После его окончания система уравнений будет решена.

В нашем случае начинать прямой ход лучше с уравнения для верхнего слоя атмосферы (с индексом  $N$ ), чтобы минимизировать вычислительные погрешности при увеличении  $\tau_i$ .

Чтобы не загромождать логику алгоритма математическими выкладками, получим предварительно формулы решения описанных выше систем линейных



уравнений. При этом уделим особое внимание удобству обозначений, согласовывая их с конкретной структурой общей системы (П9.3).

#### Система двух уравнений

Начнем с нее как с более простого случая. Она возникнет в конце прямого хода (и непосредственно из (П9.3) при  $N = 2$ ). Ее первое уравнение будет получено подстановками, а второе – останется как было. Таким образом, система двух уравнений (последний слой прямого хода у нас, как отмечено выше,  $i = 1$ ) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1^{(+)} \mathbf{v}_1^{(+)} + \mathbf{A}_1^{(-)} \mathbf{v}_1^{(-)} &= \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{R}_1^{(+)} \mathbf{v}_1^{(+)} + \mathbf{R}_1^{(-)} \mathbf{v}_1^{(-)} &= \mathbf{t}_1. \end{aligned} \quad (\text{П9.4})$$

Выражая  $\mathbf{v}_1^{(+)}$  из первого уравнения и подставляя во второе, получаем решение (П9.4)

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1^{(+)} &= (\mathbf{A}_1^{(+)})^{-1} \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{C}_1^{(-)} = (\mathbf{A}_1^{(+)})^{-1} \mathbf{A}_1^{(-)} \\ \mathbf{v}_1^{(-)} &= (\mathbf{R}_1^{(-)} - \mathbf{R}_1^{(+)} \mathbf{C}_1^{(-)})^{-1} (\mathbf{t}_1 - \mathbf{R}_1^{(+)} \mathbf{h}_1^{(+)}) \\ \mathbf{v}_1^{(+)} &= \mathbf{h}_1^{(+)} - \mathbf{C}_1^{(-)} \mathbf{v}_1^{(-)}. \end{aligned} \quad (\text{П9.5})$$

#### Система трех уравнений

В общем случае прямого хода надо рассматривать систему трех уравнений. Первое будет получено подстановками и содержать две переменные, следующие два – исходные уравнения системы (П9.3) с четырьмя переменными. Возьмем в системе (П9.3) уравнение с индексом  $i$  и, для облегчения понимания, выпишем пять связанных уравнений, вновь учитывая порядок их следования сверху вниз:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i^{(+)} \mathbf{v}_i^{(+)} + \mathbf{A}_i^{(-)} \mathbf{v}_i^{(-)} &= \mathbf{b}_i \\ \mathbf{R}_i^{(++)} \mathbf{v}_i^{(+)} + \mathbf{R}_i^{(+-)} \mathbf{v}_i^{(-)} + \mathbf{R}_{i-1}^{(++)} \mathbf{v}_{i-1}^{(+)} + \mathbf{R}_{i-1}^{(+-)} \mathbf{v}_{i-1}^{(-)} &= \mathbf{t}_{i-1}^{(+)} \\ \mathbf{R}_i^{(-+)} \mathbf{v}_i^{(+)} + \mathbf{R}_i^{(--)} \mathbf{v}_i^{(-)} + \mathbf{R}_{i-1}^{(-+)} \mathbf{v}_{i-1}^{(+)} + \mathbf{R}_{i-1}^{(--)} \mathbf{v}_{i-1}^{(-)} &= \mathbf{t}_{i-1}^{(-)} \\ \mathbf{R}_{i-1}^{(++)} \mathbf{v}_{i-1}^{(+)} + \mathbf{R}_{i-1}^{(+-)} \mathbf{v}_{i-1}^{(-)} + \mathbf{R}_{i-2}^{(++)} \mathbf{v}_{i-2}^{(+)} + \mathbf{R}_{i-2}^{(+-)} \mathbf{v}_{i-2}^{(-)} &= \mathbf{t}_{i-2}^{(+)} \\ \mathbf{R}_{i-1}^{(-+)} \mathbf{v}_{i-1}^{(+)} + \mathbf{R}_{i-1}^{(--)} \mathbf{v}_{i-1}^{(-)} + \mathbf{R}_{i-2}^{(-+)} \mathbf{v}_{i-2}^{(+)} + \mathbf{R}_{i-2}^{(--)} \mathbf{v}_{i-2}^{(-)} &= \mathbf{t}_{i-2}^{(-)}. \end{aligned} \quad (\text{П9.6})$$

Выражаем  $\mathbf{v}_i^{(+)}$  и  $\mathbf{v}_i^{(-)}$  из первых двух уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_i^{(+)} &= (\mathbf{A}_i^{(+)})^{-1} \mathbf{b}_i, \quad \mathbf{C}_i^{(-)} = (\mathbf{A}_i^{(+)})^{-1} \mathbf{A}_i^{(-)}, \quad \mathbf{D}_i^{(-)} = (\mathbf{R}_i^{(+-)} - \mathbf{R}_i^{(++)} \mathbf{C}_i^{(-)})^{-1}, \\ \mathbf{g}_i^{(-)} &= \mathbf{t}_{i+1}^{(+)} - \mathbf{R}_i^{(++)} \mathbf{h}_i^{(+)}, \end{aligned} \quad (\text{П9.7})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^{(-)} &= \mathbf{D}_i^{(-)} \mathbf{g}_i^{(-)} - \mathbf{D}_i^{(-)} \mathbf{R}_{i-1}^{(++)} \mathbf{v}_{i-1}^{(+)} - \mathbf{D}_i^{(-)} \mathbf{R}_{i-1}^{(+-)} \mathbf{v}_{i-1}^{(-)} \\ \mathbf{v}_i^{(+)} &= \mathbf{h}_i^{(+)} - \mathbf{C}_i^{(-)} \mathbf{v}_i^{(-)}. \end{aligned} \quad (\text{П9.8})$$

Подставляем (П9.8) в третье уравнение системы (П9.6) и приводим его к виду первого, но уже для индекса  $i-1$ . Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i-1}^{(\pm)} &= \mathbf{R}_{i-1}^{(\pm)} + (\mathbf{R}_i^{(+-)} \mathbf{C}_i^{(-)} - \mathbf{R}_i^{(--)} \mathbf{D}_i^{(-)}) \mathbf{R}_{i-1}^{(\pm)}, \\ \mathbf{b}_{i-1} &= \mathbf{t}_{i-1}^{(-)} - \mathbf{R}_i^{(+-)} \mathbf{h}_i^{(+)} + (\mathbf{R}_i^{(++)} \mathbf{C}_i^{(-)} - \mathbf{R}_i^{(--)} \mathbf{D}_i^{(-)}) \mathbf{g}_i^{(-)}. \end{aligned} \quad (\text{П9.9})$$

Таким образом, три последних уравнения (П9.6) стали иметь вид трех первых, что и требовалось получить.

#### Алгоритм решения системы уравнений

Теперь алгоритм решения исходной системы (3.2.34) можно записать предельно компактно (необходимые операции с векторами и матрицами – в Приложении 8).

1) Вычисляем матрицы по (П9.2) (на самом деле, пересчет, конечно, не требуется, достаточно просто преобразовать формулы (3.2.35), убрав положительные экспоненты, исключение –  $\mathbf{R}_N^{(+)}$ ).

2) Присваиваем  $\mathbf{A}_{N-1}^{(\pm)} = \mathbf{R}_N^{(\pm)}$ ,  $\mathbf{b}_{N-1} = \mathbf{t}_N$ .

3) Цикл прямого хода  $i = N-1, \dots, 1$  (значение  $i$  уменьшается). Пока  $i > 1$ , вычисляем вектора и матрицы по (П9.7), затем по (П9.9), все их храним в памяти до конца работы алгоритма. Когда  $i = 1$  (конец цикла), вычисляем  $\mathbf{v}_1^{(+)}$ ,  $\mathbf{v}_1^{(-)}$  по (П9.5).

4) Цикл обратного хода  $i = 2, \dots, N-1$  (если  $N = 2$  – не нужен). Последовательно вычисляем все искомые вектора  $\mathbf{v}_i^{(+)}$ ,  $\mathbf{v}_i^{(-)}$  по (П9.8).

5) Пересчитываем искомые вектора по (П9.1):  $\mathbf{w}_i^{(+)} = \mathbf{v}_i^{(+)} \exp(-\sqrt{\omega_i} \tau_i)$ ,  $\mathbf{w}_i^{(-)} = \mathbf{v}_i^{(-)}$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ .

6) Конец работы.

## Приложение 10. Генератор случайных чисел, равномерно распределенных на интервале [0,1]

### О выборе и тестировании генератора

В настоящее время известно несколько различных алгоритмов, реализующих генератор случайных чисел (ГСЧ), равномерно распределенных на интервале [0,1]. Имеются также функции, встроенные в стандартные языки программирования, реализующие ГСЧ. Однако, тестирование подобных встроенных функций показывает, что они не обладают достаточными характеристиками для применения в научных расчетах (реально они, скорее, созданы для компьютерных игр). Поэтому, обратим внимание, существует проблема поиска и выбора хорошего ГСЧ для научных расчетов, решать которую следует сравнительным тестированием различных генераторов, в том числе и встроенных в языки программирования.

В рамках тестирования для достаточно большой совокупности случайных чисел (1000000 или более) вычисляют характеристики распределения: математическое ожидание, дисперсию, асимметрию и эксцесс, сравнивая их с теоретическими значениями (соответственно: 1/2, 1/12, 0, -6/5). Хорошим тестом является анализ гистограммы распределения, при разбиении интервала на 100 равных отрезков (длиной 0.01), в них теоретически должно быть одинаковое число случайных чисел. Особенно следует обратить внимание на крайние отрезки (от 0 до 0.01 и от 0.99 до 1) и на отсутствие значений, больших единицы и меньших нуля. Наконец, эффективным визуальным тестом ГСЧ является “черный квадрат”, для чего последовательно полученные случайные числа объединяются парами, которые трактуются как координаты точки плоскости  $(x, y)$  и отображаются компьютером графически. Наличие неоднородностей на полученной картине говорит о низком качестве ГСЧ.

### Алгоритм ГСЧ

Приведем конкретный алгоритм ГСЧ, давно используемый и показавший достаточно хорошие результаты при тестировании.

Идея данного алгоритма – выдача в качестве случайного числа последних разрядов степеней простого числа. Очередное случайное число  $r$  при  $k$ -ом обращении к генератору вычисляется по рекуррентной формуле

$$r = \text{flt}(R_k / p), \quad R_k = q(R_{k-1} - p \text{int}(R_{k-1} / p)), \quad R_0 = p + 1. \quad (\text{П10.1})$$

В (П10.1)  $\text{flt}()$  – дробная часть числа,  $\text{int}()$  – целая часть числа, числа  $p$  и  $q$  выбираются специальным образом:  $p$  – простое число вида  $p = 2p_1 + 1$ , где  $p_1$  тоже простое;  $q \approx p/2$  и  $q = p - 3^m$ , где  $m$  – целое. Конкретно ГСЧ используется со значениями  $p = 40127$ ,  $q = 20444$ . Период повторения последовательности случайных чисел генератора равен  $p - 1 = 40126$ .

### Псевдослучайность ГСЧ

Приведенный ГСЧ (П10.1), как, впрочем, и любые другие, построен по рекуррентной формуле, следовательно, его поведение предсказуемо. Поэтому в строгой терминологии для результатов компьютерных ГСЧ используют термин “псевдослучайные числа”.

Псевдослучайность приводит к проблеме “разгона” ГСЧ, иначе он всегда будет выдавать одну и ту же последовательность чисел. Чтобы этого избежать, используют “холостую прокрутку” – при первом обращении к ГСЧ проводят генерацию первых  $n$  случайных чисел, но без выдачи значения ГСЧ (т.е. сразу выдается число номер  $n + 1$ ). Обычно в качестве  $n$  запрашивают у компьютера тысячные доли секунд текущего времени и т.п.

С другой стороны, псевдослучайность ГСЧ имеет и положительную сторону. Это позволяет в методе Монте-Карло использовать схему зависимых испытаний (раздел 4.2), для которой, как раз и требуется одна и та же последовательность псевдослучайных чисел. В частности, для (П10.1) достаточно всего лишь запомнить текущее значение  $R_{k-1}$  и затем подставить его в (П10.1) – ГСЧ начнет выдачу последовательности чисел, соответствующих числу  $R_k$ .

## Приложение 11. Моделирование отражения от произвольной поверхности в методе Монте-Карло

### Предварительные вычисления до моделирования

Согласно разделу 4.2, в общем случае коэффициент спектральной яркости поверхности для моделирования отражения задается как исходная четырехмерная таблица  $\rho^{(r)}(\eta_{k_1}, \eta_{k_2}^{(r)}, \varphi_{k_3}, \varphi_{k_4}^{(r)})$ ,  $k_1 = 1, \dots, K_1$ ,  $k_2 = 1, \dots, K_2$ ,  $k_3 = 1, \dots, K_3$ ,  $k_4 = 1, \dots, K_4$ . Мы рассматриваем самый общий случай, даже диапазоны индексов разные! Для сокращения записей, договоримся эти диапазоны индексов ниже в формулах явно не выписывать.

Во-первых, нам понадобится таблица альbedo, согласно (4.2.15) вычисляем

$$A(\eta_{k_1}, \varphi_{k_3}) = \frac{1}{\pi} \sum_{k_2=1}^{K_2} \sum_{k_4=1}^{K_4} \rho(\eta_{k_1}, \eta_{k_2}^{(r)}, \varphi_{k_3}, \varphi_{k_4}^{(r)}) \eta_{k_2}^{(r)} d^{(\eta^{(r)})}(1, k_2, K_2) d^{(\varphi^{(r)})}(1, k_4, K_4). \quad (\text{П11.1})$$

Здесь и далее  $d^{(u)}(u_1, u_2, u_3)$  – введенные в разделе 2.3 обозначения для весов квадратурной формулы трапеций (1.2.9) по аргументу  $u$ . Во-вторых, нужен аналогичный интеграл для знаменателя формулы (4.2.16):

$$R(\eta_{k_1}, \varphi_{k_3}) = \frac{1}{\pi} \sum_{k_2=1}^{K_2} \sum_{k_4=1}^{K_4} \rho(\eta_{k_1}, \eta_{k_2}^{(r)}, \varphi_{k_3}, \varphi_{k_4}^{(r)}) d^{(\eta^{(r)})}(1, k_2, K_2) d^{(\varphi^{(r)})}(1, k_4, K_4).$$

(П11.2)

Еще потребуются две одномерные плотности вероятности, причем вторая совпадающая с  $\rho^{(r)}(\eta_{k_1}, \eta_{k_2}, \varphi_{k_3}, \varphi_{k_4})$  при фиксированном  $\eta^{(r)}$ , и таблицы одномерных интегралов от них, но, для возможности интерполяции, без деления на  $R(\eta_{k_1}, \varphi_{k_3})$ . Удобнее начать с моделирования косинуса угла отражения, как более важной для переноса излучения координаты, чем азимут. Поэтому

$$\begin{aligned} \rho^{(\eta^{(r)})}(\eta_{k_1}, \eta_{k_2}, \varphi_{k_3}) &= \sum_{k_4=1}^{K_4} \rho(\eta_{k_1}, \eta_{k_2}, \varphi_{k_3}, \varphi_{k_4}) d^{(\varphi^{(r)})}(1, k_4, K_4), \\ S_1^{(\eta^{(r)})}(\eta_{k_1}, \varphi_{k_3}) &= 0, \quad S_{l_1}^{(\eta^{(r)})}(\eta_{k_1}, \varphi_{k_3}) = S_{l_1-1}^{(\eta^{(r)})}(\eta_{k_1}, \varphi_{k_3}) + \\ &+ \frac{1}{2}(\rho^{(\eta^{(r)})}(\eta_{k_1}, \eta_{l_1-1}, \varphi_{k_3}) + \rho^{(\eta^{(r)})}(\eta_{k_1}, \eta_{l_1}, \varphi_{k_3})(\eta_{l_1}^{(r)} - \eta_{l_1-1}^{(r)})), \quad l_1 = 2, \dots, K_2, \\ S_1^{(\varphi^{(r)})}(\eta_{k_1}, \eta_{k_2}, \varphi_{k_3}) &= 0, \quad S_{l_2}^{(\varphi^{(r)})}(\eta_{k_1}, \eta_{k_2}, \varphi_{k_3}) = S_{l_2-1}^{(\varphi^{(r)})}(\eta_{k_1}, \eta_{k_2}, \varphi_{k_3}) + \\ &+ \frac{1}{2}(\rho(\eta_{k_1}, \eta_{k_2}, \varphi_{k_3}, \varphi_{l_2-1}^{(r)}) + \rho(\eta_{k_1}, \eta_{k_2}, \varphi_{k_3}, \varphi_{l_2}^{(r)})(\varphi_{l_2}^{(r)} - \varphi_{l_2-1}^{(r)})), \quad l_2 = 2, \dots, K_4. \end{aligned} \quad (\text{П11.3})$$

### Интерполяция

Итак, пусть все пять необходимых функций (П11.1)-(П11.3) предварительно затабулированы. Теперь при каждом взаимодействии фотона с поверхностью мы имеем заданные значения его исходного косинуса угла  $\eta$  и азимута  $\varphi$ . Задача получения по ним значений указанных функций решается интерполяцией, очевидно, линейной, поскольку мы используем квадратурную формулу трапеций.

Формула двумерной линейной интерполяции легко получается двукратным применением одномерной (1.2.11). Выпишем ее в общем виде, причем именно в последовательной форме – максимально компактной, удобной для вычислений и допускающей итерационное обобщение на любую размерность. Пусть для таблицы  $Y(u_k, v_m)$ ,  $k = 1, \dots, K$ ,  $m = 1, \dots, M$  для заданных значений  $u$  и  $v$  определены номера интервалов  $k$  и  $m$ , таких, что  $u_k \leq u \leq u_{k+1}$  и  $v_m \leq v \leq v_{m+1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} Y(u_k, v) &= \frac{Y(u_k, v_m)(v_{m+1} - v) + Y(u_k, v_{m+1})(v - v_m)}{v_{m+1} - v_m}, \\ Y(u_{k+1}, v) &= \frac{Y(u_{k+1}, v_m)(v_{m+1} - v) + Y(u_{k+1}, v_{m+1})(v - v_m)}{v_{m+1} - v_m}, \\ Y(u, v) &= \frac{Y(u_k, v)(u_{k+1} - u) + Y(u_{k+1}, v)(u - u_k)}{u_{k+1} - u_k}. \end{aligned} \quad (\text{П11.4})$$

Теперь для заданных значений  $\eta$  и  $\varphi$  находим номера интервалов  $k_1$  и  $k_3$  по условиям  $\eta_{k_1} \leq \eta \leq \eta_{k_1+1}$ ,  $\varphi_{k_3} \leq \varphi \leq \varphi_{k_3+1}$  – см. Приложение 1, и по (П11.4) значения  $A(\eta, \varphi)$  и  $R(\eta, \varphi)$ . Первое – см. раздел 4.2, используется для моделирования альтернативы “отражение – поглощение” второе – для направления отражения. Аналогичной интерполяцией можно найти и значения функций из (П11.3), но эти функции уже не будут константами и проведение интерполяции по всем наборам переменных при каждом взаимодействии фотона с поверхностью весьма увеличит время вычислений. Поэтому поступим

хитрее – будем интерполировать эти функции непосредственно в процессе решения уравнений (4.1.3).

#### Определение косинуса угла отражения

Теперь, согласно общей модели (4.1.3), нам задано случайное число  $r_1$ . Необходимо выбрать номер интервала  $l$ , такой, что

$$S_l^{(\eta^{(r)})}(\eta, \varphi) \leq R(\eta, \varphi)r_1 \leq S_{l+1}^{(\eta^{(r)})}(\eta, \varphi). \quad (\text{П11.5})$$

Решим эту задачу (см. Приложение 1) отдельно для каждой из четырех функций на границах интервалов для  $\eta$  и  $\varphi$  (см. выше), т.е. для  $S_l^{(\eta^{(r)})}(\eta_{k_1}, \varphi_{k_3})$ ,  $S_l^{(\eta^{(r)})}(\eta_{k_1+1}, \varphi_{k_3})$ ,  $S_l^{(\eta^{(r)})}(\eta_{k_1}, \varphi_{k_3+1})$ ,  $S_l^{(\eta^{(r)})}(\eta_{k_1+1}, \varphi_{k_3+1})$ ,  $l=1, \dots, K_2$ . Обозначим соответствующие решения как  $l_1, l_2, l_3, l_4$ . Теперь достаточно интерполировать функцию  $S_l^{(\eta^{(r)})}(\eta, \varphi)$  по (П11.4) не во всем диапазоне индекса, а лишь от  $l_{\min} = \min(l_1, l_2, l_3, l_4)$  до  $l_{\max} = \max(l_1, l_2, l_3, l_4) + 1$ , после чего уже для результатов интерполяции решить неравенство (П11.5) при  $l = l_{\min}, \dots, l_{\max}$ . Если же  $l_1 = l_2 = l_3 = l_4$ , то вообще ничего больше делать не надо – значение  $l = l_1 = \dots = l_4$  получено сразу!

Далее, комбинируя формулу трапеций с линейной интерполяцией, получаем для нахождения  $\eta^{(r)}$  квадратное уравнение с решением

$$\eta^{(r)} = \eta_l^{(r)} + \frac{-\rho^{(\eta^{(r)})}(\eta, \eta_l^{(r)}, \varphi) + \sqrt{(\rho^{(\eta^{(r)})}(\eta, \eta_l^{(r)}, \varphi))^2 + 2d_l(r_1 R(\eta, \varphi) - S_l^{(\eta^{(r)})}(\eta, \varphi))}}{d_l}, \quad (\text{П11.6})$$

где  $d_l = \frac{\rho^{(\eta^{(r)})}(\eta, \eta_{l+1}^{(r)}, \varphi) - \rho^{(\eta^{(r)})}(\eta, \eta_l^{(r)}, \varphi)}{\eta_{l+1}^{(r)} - \eta_l^{(r)}}$ , значения  $\rho^{(\eta^{(r)})}(\eta, \eta_l^{(r)}, \varphi)$  и  $\rho^{(\eta^{(r)})}(\eta, \eta_{l+1}^{(r)}, \varphi)$  получаются интерполяцией по (П11.4) при уже известных  $\eta_l^{(r)}$  и  $\eta_{l+1}^{(r)}$ ; если  $d_l = 0$ , то (П11.6) заменяется на  $\eta^{(r)} = \eta_l^{(r)} + (r_1 R(\eta, \varphi) - S_l^{(\eta^{(r)})}(\eta, \varphi)) / \rho^{(\eta^{(r)})}(\eta, \eta_l^{(r)}, \varphi)$ . Напомним, что косинус зенитного угла фотона после отражения есть  $-\eta^{(r)}$ .

#### Определение азимута отражения

Далее, согласно общей модели (4.1.3) нам известен косинус угла отражения  $\eta^{(r)}$  и выбрано случайное число  $r_2$ . Требуется решить (относительно индекса  $l$ ) неравенство

$$S_l^{(\varphi^{(r)})}(\eta, \eta^{(r)}, \varphi) \leq r_2 S_{K_4}^{(\varphi^{(r)})}(\eta, \eta^{(r)}, \varphi) \leq S_{l+1}^{(\varphi^{(r)})}(\eta, \eta^{(r)}, \varphi) \quad (\text{П11.7})$$

Здесь для нахождения значений функции  $S_l^{(\varphi^{(r)})}(\eta, \eta^{(r)}, \varphi)$  потребуется уже не двумерная, а трехмерная интерполяция. Ее формулы могут быть получены еще одной итерацией формул (П11.4). Их будет семь, потому, для экономии места, не будем их приводить, будучи уверенными что читатель легко напишет их сам (кстати, вот хорошее упражнение повышенной трудности – напишите алгоритм линейной интерполяции по массиву с любым заданным числом индексов). Вычисляем интерполяцией необходимое значение  $S_{K_4}^{(\varphi^{(r)})}(\eta, \eta^{(r)}, \varphi)$ , а далее, для решения (П11.7) используем описанный выше

прием оптимизации вычислений: находим (см. Приложение 1) восемь номеров интервалов  $l_1, \dots, l_8$ , являющихся решениями (П11.7) для интерполяционного куба  $(\eta_{k_1} \leq \eta \leq \eta_{k_1+1}, \varphi_{k_3} \leq \varphi \leq \varphi_{k_3+1}, \eta_{k_2}^{(r)} \leq \eta^{(r)} \leq \eta_{k_2+1}^{(r)}; S_{l_1}^{(\varphi^{(r)})}(\eta_{k_1}, \eta_{k_2}^{(r)}, \varphi_{k_3}), S_{l_2}^{(\varphi^{(r)})}(\eta_{k_1}, \eta_{k_2}^{(r)}, \varphi_{k_3+1}), S_{l_3}^{(\varphi^{(r)})}(\eta_{k_1}, \eta_{k_2+1}^{(r)}, \varphi_{k_3}), S_{l_4}^{(\varphi^{(r)})}(\eta_{k_1}, \eta_{k_2+1}^{(r)}, \varphi_{k_3+1}), S_{l_5}^{(\varphi^{(r)})}(\eta_{k_1+1}, \eta_{k_2}^{(r)}, \varphi_{k_3}), S_{l_6}^{(\varphi^{(r)})}(\eta_{k_1+1}, \eta_{k_2}^{(r)}, \varphi_{k_3+1}), S_{l_7}^{(\varphi^{(r)})}(\eta_{k_1+1}, \eta_{k_2+1}^{(r)}, \varphi_{k_3}), S_{l_8}^{(\varphi^{(r)})}(\eta_{k_1+1}, \eta_{k_2+1}^{(r)}, \varphi_{k_3+1}))$  и интерполируем функцию  $S_l(\eta, \eta^{(r)}, \varphi)$  только в диапазоне от  $l_{\min} = \min(l_1, \dots, l_8)$ , до  $l_{\max} = \max(l_1, \dots, l_8) + 1$ , после чего решаем (П11.7) для значений индексов  $l = l_{\min}, \dots, l_{\max}$ ; если же  $l = l_1 = l_2 = \dots = l_8$ , то требуемое значение  $l$  определено сразу.

Ну а дальше все опять сводится к квадратному уравнению, в итоге имеем

$$\varphi^{(r)} = \varphi_l^{(r)} - \frac{1}{d_l} \left( -\rho(\eta, \eta^{(r)}, \varphi, \varphi_l^{(r)}) + \sqrt{(\rho(\eta, \eta^{(r)}, \varphi, \varphi_l^{(r)})^2 + 2d_l(r_2 S_{K_4}^{(\varphi^{(r)})}(\eta, \eta^{(r)}, \varphi) - S_l^{(\varphi^{(r)})}(\eta, \eta^{(r)}, \varphi))} \right), \quad (\text{П11.8})$$

где  $d_l = \frac{\rho^{(\varphi^{(r)})}(\eta, \eta^{(r)}, \varphi, \varphi_{l+1}^{(r)}) - \rho^{(\varphi^{(r)})}(\eta, \eta^{(r)}, \varphi, \varphi_l^{(r)})}{\varphi_{l+1}^{(r)} - \varphi_l^{(r)}}$ , значения  $\rho^{(\varphi^{(r)})}(\eta, \eta^{(r)}, \varphi, \varphi_l^{(r)})$

и  $\rho^{(\varphi^{(r)})}(\eta, \eta^{(r)}, \varphi, \varphi_{l+1}^{(r)})$  получаются трехмерной интерполяцией при уже известных  $\varphi_l^{(r)}$  и  $\varphi_{l+1}^{(r)}$ ; если  $d_l = 0$ , то (П11.8) заменяется на  $\varphi^{(r)} = \varphi_l^{(r)} + (r_2 S_{K_4}^{(\varphi^{(r)})}(\eta, \eta^{(r)}, \varphi) - S_l^{(\varphi^{(r)})}(\eta, \eta^{(r)}, \varphi)) / \rho^{(\varphi^{(r)})}(\eta, \eta^{(r)}, \varphi, \varphi_l^{(r)})$ .

Моделирование отражения закончено.

## Приложение 12. Геометрические соотношения для сферической атмосферы

### Система координат – предварительные определения

Поверхность Земли (планеты). Идеальная сфера, которая аппроксимирует реальную поверхность Земли (планеты). (Для планет-гигантов за “поверхность” принимается верхняя кромка их облаков [1,2].)

Центр Земли (планеты). Центр сферы – поверхности Земли (планеты).

Радиус Земли (планеты)  $R$ . Радиус сферы – поверхности Земли (планеты). Средний радиус для Земли  $R = 6370$  км [1,2]. Для повышения точности расчетов следует использовать не среднее, а локальное значение радиуса кривизны поверхности планеты в регионе моделирования измерений.

Северный полюс Земли (планеты). Точка пересечения поверхности Земли (планеты) и оси вращения Земли (планеты). Для Земли определен исторически, для других планет – по аналогии с Землей относительно плоскости эклиптики.

Геоцентрическая система координат. Сферическая система координат с началом отсчета в центре Земли (планеты).

Высота  $z$ . Геоцентрическая координата точки, определяемая вдоль луча, исходящего в данную точку из центра Земли (планеты), и отсчитываемая от точки его пересечения с поверхностью Земли (планеты). Согласно определению, высота имеет минимально возможное значение  $z = -R$ .

Географическая широта  $\vartheta_G$ . Геоцентрическая координата точки, определяемая как угол дополнительный (дающий в сумме  $\pi/2$ ) к углу между вектором, направленным из центра Земли (планеты) на северный полюс и вектором, направленным из центра Земли (планеты) в данную точку. Согласно определению  $-\pi/2 \leq \vartheta_G \leq \pi/2$  (северная широта – положительная, южная – отрицательная).

Географическая долгота  $\varphi_G$ . Геоцентрическая координата точки, определяемая как угол между проекцией вектора, направленного из центра Земли (планеты) в данную точку, на плоскость, проходящую через центр Земли (планеты), перпендикулярно ее оси вращения, и (произвольно) выбранным вектором, начинающимся из центра Земли (планеты) в указанной плоскости. Согласно определению  $-\pi \leq \varphi_G \leq \pi$ . Для Земли в качестве направления отсчета географической долготы выбрана проекция на плоскость ее измерения астрономической обсерватории в городе Гринвич (Великобритания), аппроксимируемой точкой. Знак, приписываемый долготе, стандартный: положительный отсчет – против часовой стрелки при взгляде с северного полюса (восточная долгота – положительная, западная – отрицательная). На оси вращения планеты (полюсах) координата “долгота” не определена.

Локальная система координат. Сферическая система координат с началом отсчета в произвольной точке пространства.

Зенитный угол  $\vartheta$ . Локальная координата точки, определяемая как угол между вектором, направленным из начала локальной системы координат в центр Земли (планеты) и вектором, направленным из начала локальной системы координат в данную точку. Согласно определению  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ .

Азимут  $\varphi$ . Локальная координата точки, определяемая как угол между проекцией вектора, направленного из начала локальной системы координат в данную точку, на плоскость, проходящую через начало локальной системы координат, перпендикулярно прямой, соединяющей ее с центром Земли (планеты), и (произвольно) выбранным вектором, начинающимся из начала локальной системы координат в указанной плоскости. Согласно определению  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . При  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$ , а также в точках с координатами  $\vartheta_G = \pm\pi/2$  (на полюсах) азимут не определен. Для определенности, договоримся использовать географический стандарт, т.е. отсчет азимута от направления на север, от вектора, исходящего в плоскости отсчета азимута из начала локальной системы координат в точку пересечения плоскости отсчета и прямой “центр Земли (планеты) – ее Северный полюс”, причем если центр Земли оказывается на данной прямой между северным полюсом и точкой пересечения плоскости отсчета азимута (южное полушарие), то вектор отсчета заменяется на противоположно направленный – см. рис.7.1. Стандартный отсчет азимута ведется по часовой стрелке ( $0^\circ$  – север,  $90^\circ$  – восток,  $180^\circ$  – юг,  $270^\circ$  – запад).

Трасса распространения излучения. Прямая в сферической атмосфере, вдоль которой распространяется излучение. Отметим, что направление визирования прибора осуществляется вдоль той же прямой, но в противоположную сторону: если излучение имеет координаты  $(\vartheta, \varphi)$ , то направление визирования –  $(\pi - \vartheta, \pi + \varphi)$ .

Прицельная высота. Минимальное расстояние от центра Земли (планеты) до трассы распространения излучения.

Точка прицельной высоты – точка на трассе распространения излучения, в которой достигается прицельная высота.

Координата длины  $l$  на трассе распространения излучения. Геометрическая координата, отсчитываемая от точки прицельной высоты в направлении распространения излучения.

### Преобразования сферических координат при повороте

Пусть преобразование системы координат – поворот, при котором новое направление координатной оси  $(0,0)$  есть (в исходных координатах)  $(\mathcal{G}_0, \varphi_0)$ . Рассмотрим новые координаты  $(\mathcal{G}', \varphi')$  направления, имевшего старые координаты  $(\mathcal{G}, \varphi)$ . Прежняя ось в новой системе, очевидно, имеет координаты  $(\mathcal{G}_0, \pi + \varphi_0)$ . При повороте углы между направлениями не меняются, поэтому угол между  $(\mathcal{G}_0, \pi + \varphi_0)$  и  $(\mathcal{G}', \varphi')$  есть  $\mathcal{G}$ , а угол между  $(\mathcal{G}_0, \varphi_0)$  и  $(\mathcal{G}, \varphi)$  есть  $\mathcal{G}'$ . Для соответствующих косинусов согласно (2.1.5) имеем

$$\begin{aligned} \cos \mathcal{G}' &= \cos \mathcal{G} \cos \mathcal{G}_0 + \sin \mathcal{G} \sin \mathcal{G}_0 \cos(\varphi - \varphi_0), \\ \cos \mathcal{G} &= \cos \mathcal{G}' \cos \mathcal{G}_0 - \sin \mathcal{G}' \sin \mathcal{G}_0 \cos(\varphi' - \varphi_0). \end{aligned} \quad (\text{П.12.1})$$

Соотношения (П.12.1) позволяют выразить новые сферические координаты через старые (находим  $\mathcal{G}'$  из первого, затем  $\varphi'$  из второго) и наоборот ( $\mathcal{G}$  – из второго,  $\varphi$  – из первого).

### Формулы пересчета координат на трассе распространения излучения

Постановка задачи их получения приведена в разделе 7.1. Дана точка А трассы с известными координатами  $(\mathcal{G}_{G,b}, \varphi_{G,b}, z_b, \mathcal{G}_b, \varphi_b)$ , требуется для произвольной точки В трассы с координатой  $l$  найти функции пересчета координат  $(\mathcal{G}_G(l), \varphi_G(l), z(l), \mathcal{G}(l), \varphi(l))$  – рис. П12.1. Задача для  $z(l)$  и  $\mathcal{G}(l)$  решена непосредственно в разделе 7.1. Здесь же мы получим соотношения для  $\mathcal{G}_G(l)$ ,  $\varphi_G(l)$ ,  $\varphi(l)$ , но, ради полноты материала, поместим и соотношения (7.1.3), (7.1.4):

$$r(l) = \sqrt{l^2 + (R + z_b)^2 \sin^2 \mathcal{G}_b}, \quad z(l) = r(l) - R, \quad (\text{П.12.2})$$

$$\cos \mathcal{G}(l) = -\frac{l}{r(l)}, \quad \sin \mathcal{G}(l) = \frac{(R + z_b) \sin \mathcal{G}_b}{r(l)}. \quad (\text{П.12.3})$$

Для определения географической широты рассмотрим проекцию трассы распространения излучения на плоскость экватора  $A_1B_1$  (углы  $AA_1B_1$  и  $BB_1A_1$  – прямые). Найдем угол  $A_1AB$ , обозначим его  $\gamma_b$ . В локальных координатах в точке А вектор АВ имеет направление  $(\mathcal{G}_b, \varphi_b)$ . Для вектора  $AA_1$  зенитный угол определяется из треугольника  $OA_1A$  и равен  $\pi/2 - \mathcal{G}_{G,b}$ . При этом вектор  $AA_1$  всегда направлен вдоль меридиана на юг (в северном полушарии). Это легко уяснить рассмотрев плоскость большого круга, образуемого меридианом, проходящим через точку А, в ней, очевидно, и лежит перпендикуляр  $AA_1$ . Итак, локальные координаты вектора  $AA_1$  есть  $(\pi/2 - \mathcal{G}_{G,b}, \pi)$ . Согласно (2.1.5) имеем

$$\cos \gamma_b = \cos \mathcal{G}_b \sin \mathcal{G}_{G,b} - \sin \mathcal{G}_b \cos \mathcal{G}_{G,b} \cos \varphi_b. \quad (\text{П12.4})$$

В южном полушарии, однако, направление вектора  $AA_1$  станет противоположным, то есть, учитывая отрицательность широты,  $(\pi/2 + \mathcal{G}_{G,b}, 0)$ . Для этого случая получим



$$\cos \gamma_b = -\cos \vartheta_b \sin \vartheta_{G,b} + \sin \vartheta_b \cos \vartheta_{G,b} \cos \varphi_b. \quad (\text{П12.5})$$

Окончательно

$$\cos \gamma_b = \text{sign}(\vartheta_{G,b})(\cos \vartheta_b \sin \vartheta_{G,b} - \sin \vartheta_b \cos \vartheta_{G,b} \cos \varphi_b), \quad (\text{П12.6})$$

где  $\text{sign}(x)$  – знак числа.

Из трапеции  $AA_1B_1B$  для ситуации рис.П12.1 получаем

$$r_b \sin \vartheta_{G,b} - r(l) \sin \vartheta_G(l) = (l - l_b) \cos \gamma_b. \quad (\text{П12.7})$$

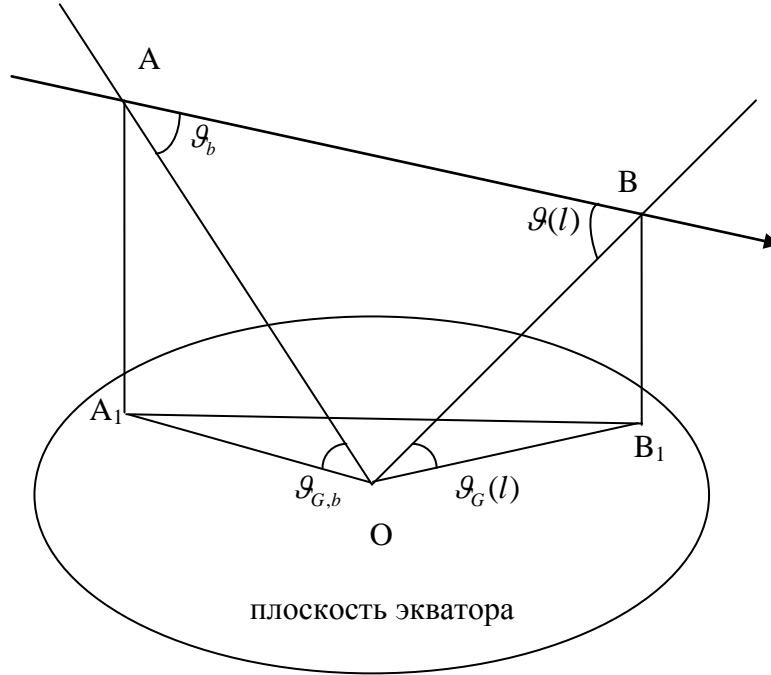


Рис. П12.1. К определению географических координат на трассе распространения излучения.

Отметим, что в нашей геометрии всегда  $l_b < l$ , поэтому знак изменения широты определяется углом  $\gamma_a$ , который фактически есть угол направления трассы излучения на плоскость экватора и для любых случаев уже задан выражением (П12.6). Поэтому для полного определения (П12.7) мы должны рассмотреть случай южного полушария и перехода трассы излучения через экватор. Для южного полушария отрицательная широта должна уменьшаться при движении к экватору, поэтому в правой части (П12.7) надо записать множитель  $\text{sign}(\vartheta_{G,b})$ . Случай перехода через экватор описывается при мысленной модификации рис.П12.1, для него, с учетом изменения знака широты, справедливо (П12.7). Теперь, учитывая для южного полушария в (П12.6) и (П12.7)  $\text{sign}^2(x)=1$ , подставляя согласно (1.7.5)  $l_b = -r_b \cos \vartheta_b$ , окончательно получаем общее выражения для географической широты

$$\vartheta_G(l) = \arcsin\left(\frac{r_b (\sin \vartheta_{G,b} - \cos \vartheta_b \cos \delta_b) - l \cos \delta_b}{r(l)}\right), \quad (\text{П12.8})$$

$$\cos \delta_b = \cos \vartheta_b \sin \vartheta_{G,b} - \sin \vartheta_b \cos \vartheta_{G,b} \cos \varphi_b. \quad (\text{П12.9})$$

Для определения географической долготы рассмотрим треугольник  $A_1OB_1$  – рис.П12.1. Угол  $A_1OB_1$  есть угол изменения долготы. Все три стороны

этого треугольника теперь известны:  $A_1O$  есть  $r_b \cos \mathcal{G}_{G,b}$ ,  $B_1O$  есть  $r(l) \cos \mathcal{G}_G(l)$ ,  $A_1B_1$  есть  $(l-l_b) \sin \gamma_b$ . Все функции инвариантны к изменению полушария и направления. Воспользовавшись теоремой косинусов, имеем

$$\cos \Delta \varphi_G(l) = \frac{r_b^2 \cos^2 \mathcal{G}_{G,b} + r^2(l) \cos^2 \mathcal{G}_G(l) - (l-l_b)^2 (1 - \cos^2 \gamma_b)}{2r_b r(l) \cos \mathcal{G}_{G,b} \cos \mathcal{G}_G(l)}. \quad (\text{П12.10})$$

Можно подставить в (П12.10)  $\cos^2 \mathcal{G}_G(l)$ , выразив его через (П12.8), однако, принципиальных упрощений при этом не возникает, формула (П12.10) оказывается удобнее для практических вычислений с учетом  $\cos^2 \delta_b = \cos^2 \gamma_b$ . Знак изменения угла долготы, очевидно, определяется исходным азимутом  $\varphi_b$ : положительный при движении на восток и отрицательный – на запад. Итак,

$$\begin{aligned} \varphi_G(l) &= \varphi_{G,b} + \text{sign}(\pi - \varphi_b) \times \\ &\times \arccos \left( \frac{r_b^2 \cos^2 \mathcal{G}_{G,b} + r^2(l) \cos^2 \mathcal{G}_G(l) - (l+r_b \cos \mathcal{G}_b)^2 (1 - \cos^2 \delta_b)}{2r_b r(l) \cos \mathcal{G}_{G,b} \cos \mathcal{G}_G(l)} \right). \end{aligned} \quad (\text{П12.11})$$

Отметим, что результат вычислений по (П12.11) возможно придется привести к интервалу  $[-\pi, \pi]$  (вычитанием  $2\pi$ , если  $\varphi_G(l) > \pi$ , прибавлением  $2\pi$ , если  $\varphi_G(l) < -\pi$ ).

Рассмотрим вновь трапецию  $AA_1B_1B$ . Угол  $B_1BA$  в ней есть  $\pi - \gamma_b$ . С другой стороны, это угол в локальной системе координат точки  $B$  между проекцией на плоскость экватора и направлением, противоположным излучению, т.е.  $(\pi - \mathcal{G}(l), \pi + \varphi(l))$ . Написав соотношения, аналогичные (П12.6), имеем

$$-\cos \gamma_b = \text{sign}(\mathcal{G}_G(l)) (-\cos \mathcal{G}(l) \sin \mathcal{G}_G(l) + \sin \mathcal{G}(l) \cos \mathcal{G}_G(l) \cos \varphi(l)). \quad (\text{П12.12})$$

Из (П12.12) находим

$$\cos \varphi(l) = \frac{\text{sign}(\mathcal{G}_G(l)) \cos \mathcal{G}(l) \sin \mathcal{G}_G(l) - \cos \gamma_b}{\text{sign}(\mathcal{G}_G(l)) \sin \mathcal{G}(l) \cos \mathcal{G}_G(l)}. \quad (\text{П12.13})$$

Однако косинус еще не определяет значение угла в интервале  $[0, 2\pi]$ . Применим следующее рассуждение. Допустим, трасса излучения проходит в северном полушарии у самого экватора ( $\mathcal{G}_{G,b}$  и  $\mathcal{G}_G(l)$  почти нули), тогда согласно (П12.6), (П12.12), азимут фактически будет определяться значением  $\varphi_b$ . Отсюда получаем следующую, слегка искусственную, логическую конструкцию

$$\varphi(l) = \pi(1 - \text{sign}(\pi - \varphi_b)) / 2 + \arccos \left( \frac{\text{sign}(\mathcal{G}_G(l)) \cos \mathcal{G}(l) \sin \mathcal{G}_G(l) - \cos \gamma_b}{\text{sign}(\mathcal{G}_G(l)) \sin \mathcal{G}(l) \cos \mathcal{G}_G(l)} \right). \quad (\text{П12.14})$$

Таким образом, совокупность последовательно применяемых соотношений (П12.2), (П12.3), (П12.6), (П12.8), (П12.9), (П12.11), (П12.14) полностью решает задачу пересчета координат на трассе распространения излучения в сферической атмосфере. Отметим, что мы не стали загромождать изложение рассмотрением особых случаев, когда не все входные и выходные данные для расчетов определены (точки географических полюсов, случаи визирования в зенит или надир). На самом деле при практических расчетах все

проблемы с “особыми” точками и направлениями элементарно снимаются путем рассмотрения точек и направлений предельно к ним близких (например, отстоящих на метр от полюса), для которых все необходимые координаты уже определены.

### Формулы пересчета зенитного угла и азимута солнца на трассе распространения излучения

Это фактически продолжение предыдущей задачи для рассеянного солнечного излучения – раздел 7.2. Пусть в исходной точке А заданы еще косинус зенитного угла солнца  $\eta_{0,b}$  и азимут солнца  $\varphi_{0,b}$  (солнечные лучи освещают планету параллельным потоком). Требуется найти зависимости  $\eta_0(l)$  и  $\varphi_0(l)$ . Для решения задачи перейдем в новую систему геоцентрических координат, ось которых совместим с направлением “надир-зенит” в точке А – рис.П12.2. В новой системе локальные и геоцентрические координаты совпадут, следовательно излучение солнца будет иметь геоцентрические координаты  $(\mathcal{G}_{0,b} - \pi/2, \varphi_{0,b})$ , поскольку вектор излучения направлен ниже плоскости нового экватора (“южная” широта).

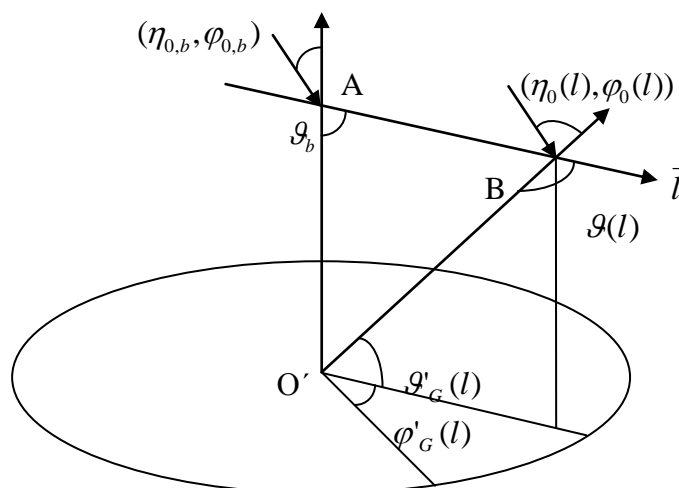


Рис. П12.2. К определению координат солнца на трассе распространения излучения.

Определим в новой системе координат широту и долготу точки В, обозначим их  $(\mathcal{G}'_G(l), \varphi'_G(l))$ . Из треугольника АО'В (рис П12.2) имеем

$$\mathcal{G}_b + (\pi - \mathcal{G}(l)) + (\pi/2 - \mathcal{G}'_G(l)) = \pi. \quad (\text{П12.15})$$

Долготу  $\varphi'_G(l)$  будем отсчитывать от направления азимута  $\varphi_b$ , то есть просто положим  $\varphi'_G(l) = \varphi_b$ . Из соотношения (П12.15) с учетом (П12.2), (П12.3) находим

$$\begin{aligned} \cos \mathcal{G}'_G(l) &= \sin \mathcal{G}_b \frac{l + (R + z_b) \cos \mathcal{G}_b}{\sqrt{l^2 + (R + z_b)^2 \sin^2 \mathcal{G}_b}}, \\ \sin \mathcal{G}'_G(l) &= \frac{(R + z_b) \sin^2 \mathcal{G}_b - l \cos \mathcal{G}_b}{\sqrt{l^2 + (R + z_b)^2 \sin^2 \mathcal{G}_b}}. \end{aligned} \quad (\text{П12.16})$$

Теперь перейдем в еще одну новую систему координат, ось которой совместим с направлением  $O'B - (\pi/2 - \mathcal{G}'_G(l), \varphi'_G(l))$ . В ней новые координаты излучения солнца  $(\eta_0(l), \varphi_0(l))$  вновь совпадут с геоцентрическими, т.е. широтой  $\eta_0(l) - \pi/2$  и долготой  $\varphi_0(l)$ . При применении соотношений (П12.1) учтем, что координатные углы в них дополнительные к широтам (например,  $\mathcal{G}_{0,b} - \pi/2$  переходит в  $\pi/2 - (\mathcal{G}_{0,b} - \pi/2) = \pi - \mathcal{G}_{0,b}$ ). Теперь, согласно соотношениям (П12.1) мы получим

$$\begin{aligned} -\eta_0(l) &= -\eta_{0,b} \sin \mathcal{G}'_G(l) + \sqrt{1 - \eta_{0,b}^2} \cos \mathcal{G}'_G(l) \cos(\varphi_{0,b} - \varphi'_G(l)) \\ -\eta_{0,b} &= -\eta_0(l) \sin \mathcal{G}'_G(l) - \sqrt{1 - (\eta_0(l))^2} \cos \mathcal{G}'_G(l) \cos(\varphi_0(l) - \varphi'_G(l)). \end{aligned} \quad (\text{П12.17})$$

Из первого соотношения (П12.17) после подстановки (П12.16) и элементарных преобразований находим

$$\eta_0(l) = \frac{(R + z_b)\eta_{0,b} - ((R + z_b)\eta_{0,b} + l)\chi_0}{\sqrt{(R + z_b)^2(1 - \eta_b^2) + l^2}}, \quad (\text{П12.18})$$

где  $\chi_0$  – косинус угла между направлениями  $(\eta_{0,b}, \varphi_{0,b})$  и  $(\eta_b, \varphi_b)$ , о нем подробнее скажем ниже. Из второго соотношения (П12.17) теперь можно найти косинус разности азимутов с учетом  $\varphi'_G(l) = \varphi_b$ . Однако для нахождения искомого  $\varphi_0(l)$  этого еще недостаточно, здесь опять неизбежно придется прибегнуть к рассуждениям.

Отметим, как очень важный момент, что при выводе соотношений (П12.17) мы фактически рассматривали разность азимута трассы распространения излучения и азимута солнца на ней. То есть реально отсчитывали азимут от солнца (именно так, а не солнца – от трассы). Назовем этот азимут “солнечным”, его диапазон  $[0, 2\pi]$ . Он не совпадает с географическим азимутом, отсчитываемым, как мы договорились выше, от направления на север. Поэтому для солнечного азимута необходимо новое обозначение, пусть это будет  $\varphi'_b$  и  $\varphi'_{0,b}$ . Теперь можно привести формулу для  $\chi_0$ , имеем

$$\chi_0 = \eta_b \eta_{0,b} + \sqrt{(1 - \eta_b^2)(1 - \eta_{0,b}^2)} \cos(\varphi'_b - \varphi'_{0,b}). \quad (\text{П12.19})$$

Пусть азимут  $\varphi'_b$  совпадает с  $\varphi'_{0,b}$ , тогда, очевидно и  $\varphi'_0(l) = \varphi'_b$ . При малом отклонении  $\varphi'_{0,b}$  от  $\varphi'_b$  знак нового азимута определится просто стандартным направлением отсчета углов – положительный против часовой стрелки и отрицательный – по часовой. Итак, если  $\varphi'_{0,b} - \varphi'_b < \pi$ , то знак арккосинуса, полученного из (П12.17) положительный, если  $\varphi'_{0,b} - \varphi'_b > \pi$  – отрицательный. Окончательно, после элементарных преобразований, имеем

$$\begin{aligned} \varphi'_0(l) &= \varphi'_{0,b} + \text{sign}(\pi - (\varphi_{0,b} - \varphi'_b)) \arccos(u(l)/v(l)), \\ u(l) &= ((R + z_b)(1 - \eta_b^2) - l\eta_b) \sqrt{1 - \eta_{0,b}^2} \cos(\varphi'_b - \varphi'_{0,b}) + \\ &+ ((R + z_b)\eta_b + l)\eta_{0,b} \sqrt{1 - \eta_b^2}, \\ v(l) &= \sqrt{1 - \eta_{0,b}^2(l)} \sqrt{(R + z_b)^2(1 - \eta_b^2) + l^2}. \end{aligned} \quad (\text{П12.20})$$

Для возвращения к географическому отсчету азимутов, достаточно договорится, что  $\varphi'_{0,b}$  является таковым (географическим), т.е.  $\varphi'_{0,b} = \varphi_{0,b}$ . Тогда получаем следующие очевидные пересчетные соотношения

$$\begin{aligned} \varphi'_b &= \varphi_{0,b} - \varphi_b, \quad \varphi'(l) = \varphi'_0(l) - \varphi'_b, \quad \varphi'(l) = \varphi_0(l) - \varphi(l), \\ \varphi_0(l) &= \varphi'_0(l) - \varphi'_b + \varphi(l) = \varphi'_0(l) - \varphi_{0,b} + \varphi_b + \varphi(l). \end{aligned} \quad (\text{П12.21})$$

При расчетах по (П12.20), (П12.21) возможно придется приводить результаты к интервалу  $[0, 2\pi]$  (вычитанием  $2\pi$ , если, результат больше  $2\pi$  и прибавлением  $2\pi$ , он меньше нуля).

Итак, соотношения (П12.18)-(П12.21) полностью определяют зенитный угол и азимут солнца на трассе распространения излучения. Отметим несколько важных в учебном плане обстоятельств. Во-первых, использование солнечных азимутов очень удобно, так как совпадает со стандартом теории переноса излучения, в частности, не порождает геометрических проблем при учете поляризации – см. раздел 7.2. Во-вторых, соотношения (П12.18)-(П12.20) при использовании солнечных азимутов вообще никак не зависят от географических координат. Это легко понять, если представить круглый земной шар (глобус), освещенный солнцем, изменение солнечных координат на нем никак не связаны с его конкретной ориентацией (для большей наглядности достаточно “стереть” с глобуса широты и долготы). В-третьих, трассы распространения рассеянного излучения и излучения солнца являются прямыми линиями, поэтому косинус угла между направлениями  $(\eta_0(l), \varphi'_0(l))$  и  $(\mathcal{G}(l), \varphi'_b)$ , не зависит от координаты  $l$  и всегда равен  $\chi_0$ . Предлагаем читателю убедиться в этом в качестве упражнения.

#### **Нахождение границ освещенного солнцем участка трассы рассеяния**

Границы освещенной области трассы, заданной начальными значениями  $z_b \equiv z$ ,  $\cos \mathcal{G}_b = \eta_b \equiv \eta$ ,  $\varphi_b \equiv \varphi$ , с учетом  $\cos \mathcal{G}_0 = \eta_{0,b} \equiv \eta_0$ ,  $\varphi_{0,b} \equiv \varphi_0$ , соответствуют координатам  $l$  для которых на трассе направления на солнце (трассе прямого излучения) прицельная высота  $h_0 = 0$ . Это, с учетом подстановок для трассы прямого излучения (раздел 7.2)  $z_b = z(l)$ ,  $\eta_b = -\eta_0(l)$ , приводит из формулы (7.1.2) к соотношению

$$(l^2 + (R+z)^2(1-\eta^2))(1-\eta_0^2(l)) = (R+z_0)^2, \quad (\text{П12.22})$$

где  $z_0$  – высота нижней границы атмосферы. Выражение (П12.22) с учетом (7.2.4) есть квадратное уравнение относительно координаты  $l$ . Его решение:

$$\begin{aligned} L_{1,2} &= \frac{(R+z)\chi_0(\eta\chi_0 - \eta_0)}{1-\chi_0^2} \pm \\ &\pm \frac{\sqrt{(R+z)^2(\eta^2 + \eta_0^2 - 2\eta\eta_0\chi_0) - (z-z_0)(2R+z+z_0)(1-\chi_0^2)}}{1-\chi_0^2}. \end{aligned} \quad (\text{П12.23})$$

Из наглядного представления об освещении Земли (планеты) Солнцем – рис.П12.3, очевидно, что область тени лежит между корнями уравнения. Поэтому, если вещественных значений  $L_{1,2}$  не существует, то вся трасса освещена (трасса 1 на рис.П12.3). Иначе, для касательной трассы достаточно проверить по (7.2.4) условие  $\eta_0((L_1 + L_2)/2) \geq 0$ , тогда получаем случай полного освещения (трасса 2 на рис.П12.3). Для наклонной трассы область тени может

начинаться только от поверхности, поэтому проверяется условие  $L_1 < l_0 < L_2$ , где по (7.1.6)  $l_0 = -\text{sign}(\eta)\sqrt{(R+z_0)^2 - (R+z)^2(1-\eta^2)}$ , иначе опять вся трасса освещена. Наконец, остается проверить, что  $\eta_0(l_0) \geq 0$ , тогда вновь имеем полное освещение (трасса 3 на рис. П12.3). Искомые  $l_1, l_2$  для случая полного освещения будут приведены ниже.

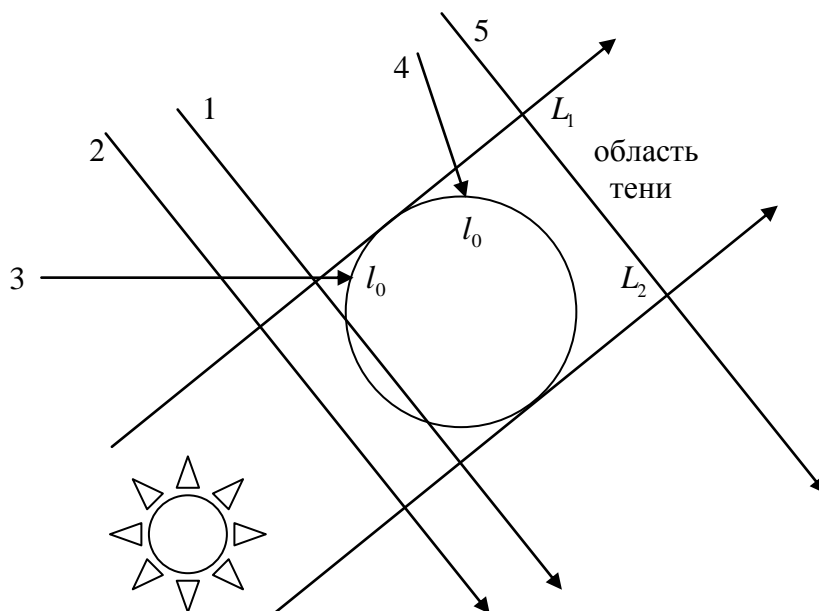


Рис. П12.3. К логике выбора границ освещенного участка трассы.

Если рассмотренные условия полного освещения не выполнены, т.е. существует теневой участок, то для нахождения пределов освещенного участка трассы  $l_1, l_2$ , считая, для определенности в (П12.23)  $L_2 > L_1$ , найдем координаты границ точек трассы:  $L_3$ , соответствующей границе атмосферы и  $L_4$ , соответствующей точке  $z$  (на рис. П12.3 точки  $L_3$  и  $L_4$  не показаны, чтобы не загромождать его, однако их легко поместить туда мысленно для каждого из рассматриваемых ниже логических случаев). При  $\eta > 0$  (трасса 4 на рис. П12.3) граница может быть только верхней, поэтому из (7.1.6) находим  $L_3 = -\sqrt{(R+z_\infty)^2 - (R+z)^2(1-\eta^2)}$ . При  $\eta \leq 0$  (трасса 5 на рис. П12.3) возможна касательная трасса, поэтому находим по (7.1.2) прицельную высоту  $h_0 = (R+z)\sqrt{1-\eta^2} - R$ , после чего, если  $h_0 \geq 0$ , то трасса касательная и вновь  $L_3 = -\sqrt{(R+z_\infty)^2 - (R+z)^2(1-\eta^2)}$ , если же  $h_0 < 0$ , то трасса наклонная и  $L_3 = l_0$ . В любом случае имеем по (7.1.5)  $L_4 = -(R+z)\eta$  (и всегда  $L_3 \leq L_4$ ).

Далее, возможны следующие четыре логических случая. Если  $L_1 \leq L_3 < L_4 \leq L_2$ , то трасса целиком лежит в области тени (интенсивность рассеянного солнечного излучения на ней нулевая, можно формально положить  $l_1 = l_2 = 0$ ). Если  $L_4 \leq L_1$  или  $L_3 \geq L_2$ , то вся трасса освещена и  $l_1 = L_3, l_2 = L_4$ .

Если  $L_3 < L_2$  и  $L_4 > L_2$ , то затенен участок от границы, следовательно  $l_1 = L_2$ ,  $l_2 = L_4$ . Если  $L_3 < L_1$  и  $L_4 > L_1$ , то затенена начальная точка трассы, следовательно  $l_1 = L_3$ ,  $l_2 = L_1$ .

### Согласование геометрических и оптических координат в методе Монте-Карло

Для ММК в сферической атмосфере (алгоритм раздела 7.2) необходимо по заданному оптическому пути  $\Delta\tau$  находить геометрическую координату трассы  $l$ , либо, по заданной оптической глубине  $\tau$  высоту  $z$ . Начнем со второй задачи, как более простой.

Определение высоты по оптической глубине. Имеем согласованные сетки высот  $z_i$  и оптических глубин  $\tau_i$ ,  $i=1, \dots, N$ , причем массив  $z_i$  – возрастающий, а  $\tau_i$  – убывающий. По заданному значению  $\tau$  находим номер интервала  $j$ , соответствующий условию  $\tau_j \geq \tau \geq \tau_{j+1}$  (алгоритм в Приложении 1). Соответственно,  $z_j \leq z(\tau) \leq z_{j+1}$ . Далее достаточно определить высоту из кусочных аппроксимаций раздела 1.2, рассматривая их как уравнения относительно  $z$ .

Кусочно-постоянная. Из (1.2.15) получаем

$$z(\tau) = z_{j+1} - 2 \frac{\tau - \tau_{j+1}(z_{j+1})}{\alpha_{j+1}(z_{j+1}) + \alpha_j(z_j)}. \quad (\text{П12.24})$$

Кусочно-линейная. Переписав, следуя [3], (1.2.16) из аналога (1.2.11) как

$$\tau(z_{j+1}, z) = \alpha_{j+1}(z_{j+1})(z_{j+1} - z) - \frac{1}{2} d (z_{j+1} - z)^2, \quad d = \frac{\alpha_{j+1}(z_{j+1}) - \alpha_j(z_j)}{z_{j+1} - z_j}, \quad (\text{П12.25})$$

получаем

$$z(\tau) = z_{j+1} - \frac{\alpha_{j+1} - \sqrt{\alpha_{j+1}^2 - 2d(\tau - \tau_{j+1}(z_{j+1}))}}{d}, \quad (\text{П12.26})$$

если  $d = 0$ , то переходим к соотношению (П12.24).

Кусочно-экспоненциальная. Непосредственно из (1.2.18) находим

$$z(\tau) = z_{j+1} - \frac{(z_{j+1} - z_j)}{d} \ln \left( 1 + \frac{d(\tau - \tau_{j+1}(z_{j+1}))}{\alpha_j(z_j)(z_{j+1} - z_j)} \right), \quad d = \left| \ln \left( \frac{\alpha_{j+1}(z_{j+1})}{\alpha_j(z_j)} \right) \right|, \quad (\text{П12.27})$$

при  $\alpha_{j+1}(z_{j+1}) = \alpha_j(z_j)$  используем соотношение (П12.24).

Построение массива трассы для ММК в сферической атмосфере. Это массив значений оптического пути при пересечении слоев атмосферы, получающийся “автоматически” при вычислениях по соотношениям раздела 7.1 ((1.2.4), (7.1.7)-(7.1.11)). В алгоритме раздела 7.2 мы не стали вдаваться в детали формирования этого массива, дабы не загромождать им текст. Здесь же приведем все необходимые вычислительные подробности.

Имеем стартовую точку трассы с координатами  $(z, \eta)$  (остальные координаты здесь не потребуются). Обозначим  $l_1 = l(z)$  – соотношение (7.1.5). В алгоритме ММК гарантируется, что стартовая точка  $l_1$  лежит внутри атмосферы. Следовательно, для соответствующей ей высоты  $z$  имеет место соотношение  $z_j \leq z < z_{j+1}$ , где  $j$  – номер уровня высотной стеки, находимый по

алгоритму Приложения 1. Строим массив  $\tau_k(l_k)$ , полагая  $\tau_1(l_1) = 0$ ,  $\tau_2(l_2) = \tau(l_1, l(z'))$  – соотношение (7.1.7), где  $z' = z_j$  или  $z' = z_{j+1}$  (конкретику выбора приведем ниже). Таким образом, минимум две точки в массиве  $\tau_k(l_k)$  нам гарантированы. Далее включается итерационная процедура  $\tau_{k+1}(l_{k+1}) = \tau_k(l_k) + \tau(l_k, l(z'))$ , итерации прекращаются по достижении границы атмосферы  $z' = z_1$  или  $z' = z_N$ .

Теперь логика выбора следующей точки высотной сетки. Для начальной точки трассы ( $l_1$ ) имеем  $z_j \leq z < z_{j+1}$ . Следовательно, если  $\eta < 0$ , то “идем вверх” и  $z' = z_{j+1}$ . Если  $\eta \geq 0$  и прицельная высота  $h_0 \leq z_j$ , где, согласно (7.1.12)  $h_0 = (R + z)\sqrt{1 - \eta^2} - R$ , то в данном слое “идем вниз” и  $z' = z_j$  (или  $z' = z_{j-1}$  при  $z = z_j$ ). Если же  $\eta \geq 0$ , но  $h_0 > z_j$ , то в данном слое проходим прицельную высоту и  $z' = z_{j+1}$ . Для промежуточной точки трассы  $l_k$  текущая граница высотного слоя уже известна, обозначим ее  $z_j$ . При выборе следующей точки  $z'$  находим  $\eta(l_k)$  по (7.1.4) и имеем ту же логику: если  $\eta(l_k) < 0$ , то  $z' = z_{j+1}$ ; если  $\eta(l_k) \geq 0$  и  $h_0 \leq z_{j-1}$ , то  $z' = z_{j-1}$ ; если же  $\eta(l_k) \geq 0$ , но  $h_0 > z_{j-1}$ , то (внимание!)  $z' = z_j$ .

Чтобы впоследствии избежать лишних вычислений, удобно одновременно с массивом  $\tau_k(l_k)$  строить и целочисленный массив номеров высотных уровней  $m(k)$ . Соответственно, начиная с  $k = 2$ , имеем  $m(k) = j(z')$  – индекс высоты  $z'$  в высотной сетке ( $1 \leq j(z') \leq N$ ). Для первой точки ( $k = 1$ )  $m(1) = j$ , если  $z' = z_{j+1}$  ( $z' = z_{j-1}$ ) и  $m(1) = j + 1$ , если  $z' = z_j$ .

Определение геометрического пути по оптическому. Итак, имеем сформированные, как описано выше, массив  $\tau_k(l_k)$ ,  $k = 1, \dots, K$  и массив номеров  $m(k)$ . Задана начальная координата  $l_1$  и оптический путь  $\Delta\tau$ . Наша задача – определить значение координаты  $l$ , соответствующей оптическому пути  $\Delta\tau$ .

Сначала находим номер интервала  $k$ , удовлетворяющий неравенству  $\tau_k(l_k) \leq \Delta\tau \leq \tau_{k+1}(l_{k+1})$  – см. Приложение 1. Алгоритм ММК гарантирует нахождение  $\Delta\tau$  внутри массива  $\tau_k(l_k)$ . Теперь, для определения искомого значения  $l$  мы имеем уравнение

$$\Delta\tau - \tau_k(l_k) = \tau(l_k, l), \quad (\text{П12.28})$$

где  $\tau(l_k, l)$  вычисляется по формуле (7.1.7). Для кусочно-постоянной аппроксимации (1.2.15) из (7.1.8) просто следует

$$l = l_k + 2 \frac{\Delta\tau - \tau_k(l_k)}{\alpha_{m(k)}(z_{m(k)}) + \alpha_{m(k+1)}(z_{m(k)+1})}. \quad (\text{П12.29})$$

Для кусочно-линейной аппроксимации (1.2.16) решать уравнение (П12.28) удобнее всего итерационно по формуле Ньютона:

$$l'_n = l'_{n-1} - \frac{f(l'_{n-1})}{f'(l'_{n-1})}, \quad (\text{П12.30})$$

где  $n$  – номер итерации,



$$f(l') = \tau(l_k, l') - \Delta\tau + \tau_k(l_k), \quad f'(l') = \frac{d}{dl'} f(l_k, l'). \quad (\text{П12.31})$$

За начальное значение  $l'$  в (П12.30) достаточно принять “линейное приближение”

$$l'_0 = l_k + \frac{\Delta\tau - \tau(l_k)}{\tau(l_{k+1}) - \tau(l_k)} (l_{k+1} - l_k). \quad (\text{П12.32})$$

Итерации (П12.30) прекращаются, когда разность между  $l'_n$  и  $l'_{n-1}$  становится менее заданной (стандартно – один метр, как правило, достаточно трех-четырех итераций). В итоге имеем  $l = l'_n$ .

Вид функций  $f(l')$  определяются соотношениями (7.1.11), а их производных – подынтегральной функцией соотношения (7.1.9). Конкретно:

$$\begin{aligned} f(l) &= b_i^{(1)}(l - l_i) + \\ & \frac{a_i^{(1)}}{2} \left( lz(l) - l_i z(l_i) + (R + z')^2 (1 - (\eta')^2) \ln \frac{l + z(l) + R}{l_i + z(l_i) + R} - R(l - l_i) \right) - \Delta\tau + \tau(l_i), \\ f'(l) &= b_i^{(1)} + a_i^{(1)} z(l). \end{aligned} \quad (\text{П12.33})$$

### Идеальное зеркальное отражение в ММК

Задача, см. раздел 7.2, – определение стартового зенитного угла трассы  $\eta'$  с заданной высоты  $z$  для которого на поверхности  $\eta'(l) = \eta_0(l)$ , где  $\eta_0$  – косинус зенитного угла солнца в стартовой точке трассы.

Определяем координату поверхности по (7.1.6)

$$l = -\sqrt{(R + z_0)^2 - (R + z)^2 (1 - \eta'^2)}. \quad (\text{П12.34})$$

Для нахождения  $\eta'$  имеем, согласно (7.1.4), (7.2.4) уравнение

$$\begin{aligned} (R + z)\eta' \chi_0 + l\chi_0 - l - (R + z)\eta_0 &= 0, \\ \chi_0 = \eta' \eta_0 + \sqrt{(1 - (\eta')^2)(1 - \eta_0^2)} \cos(\varphi_0' - \varphi_0), \quad \varphi_0' &= \pi + \varphi_0. \end{aligned} \quad (\text{П12.35})$$

Учитывая, что  $\cos(\varphi_0' - \varphi_0) = -1$ , и разделив (П12.35) на  $(R + z)$  окончательно получаем

$$\begin{aligned} f(\eta') &= \eta' a(\eta') + b(\eta')(1 - a(\eta')) - \eta_0, \\ a(\eta') &= \eta' \eta_0 - \sqrt{(1 - (\eta')^2)(1 - \eta_0^2)}, \\ b(\eta') &= \sqrt{(R + z_0)^2 / (R + z)^2 - 1 + (\eta')^2}. \end{aligned} \quad (\text{П12.36})$$

Уравнение для (П12.36)  $f(\eta') = 0$  решается численно по уже использованной выше итерационной формуле Ньютона

$$\eta'_n = \eta'_{n-1} - \frac{f(\eta'_{n-1})}{f'(\eta'_{n-1})}, \quad \eta'_0 = \eta_0, \quad (\text{П12.37})$$

где  $n$  – номер итерации, условие их прекращения – разность  $|\eta'_n - \eta'_{n-1}|$  меньше заданной (например  $10^{-4}$ ), обычно достаточно двух-трех итераций, окончательное решение есть  $\eta' = \eta'_n$ , для производной из (П12.36) имеем

$$f'(\eta') = a(\eta') + \eta' a'(\eta') + b'(\eta')(1 - a(\eta')) + b(\eta')(1 - a'(\eta')),$$

$$\begin{aligned}
 a'(\eta') &= \eta_0 - \eta' \sqrt{\frac{1 - \eta_0^2}{1 - (\eta')^2}}, \\
 b'(\eta') &= \frac{\eta'}{\sqrt{(R + z_0)^2 / (R + z)^2 - 1 + (\eta')^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{II12.38}$$

## Заключение

В учебном пособии были представлены различные численные методы теории переноса излучения. Следует отметить, что, конечно, они далеко не исчерпывают всего круга современных задач в этой области. В частности, вне рамок пособия остались такие вопросы, как перенос излучения в оптически толстых средах (облаках), перенос излучения с перераспределением по частотам, моделирование неравновесного теплового излучения, нестационарные задачи (в частности, лидарного зондирования). В сущности, в пособии изложены самые традиционные, классические методы. Однако без их знания невозможен и переход к современным.

Приведем, в качестве общего заключения, таблицу сравнительных характеристик рассмотренных в пособии методов расчета полей излучения с учетом многократного рассеяния.

*Таблица. Сравнительные характеристики численных методов.*

Метод.	Основные достоинства.	Основные недостатки.
МПР	Физическая наглядность, простота, тесная связь с основными уравнениями теории переноса. Применим для любых типов отражающих поверхностей, как для солнечного, так и для теплового излучения. Может быть особенно эффективен в ИК и МКВ диапазонах (при наличии достаточного поглощения). Применим для поляризованного излучения.	В классическом варианте использует разложение по азимутальным гармоникам. Медленный (при слабом поглощении). Неприменим для облачной атмосферы.
МСГ	Считается математически самым “строгим”.	Использует разложение по азимутальным гармоникам. Неприменим для теплового излучения. Достаточно сложен в реализации.
МДО	Применим для любых типов отражающих поверхностей, как для солнечного, так и для теплового излучений. Позволяет получать решения в виде явных аналитических выражений. Считается самым быстрым.	Использует разложение по азимутальным гармоникам. Чисто математический, лишен физической наглядности. Весьма сложен в реализации.
МКР	Упрощенный (“численный”) вариант МДО, наследующий все его достоинства, кроме аналитических выражений и, возможно, быстроты. Применим для поляризованного излучения и сферической атмосферы.	В классическом варианте использует разложение по азимутальным гармоникам. Чисто математический, лишен физической наглядности.
МСС	Применим для атмосфер любых оптических толщин (облачных). Физически нагляден, очень прост в реализации, хороший “учебный” метод.	Применим только для солнечного излучения и только для интенсивностей на границах атмосферы (не

	Применим для поляризованного излучения.	внутри). В классическом варианте использует разложение по азимутальным гармоникам.
ММК	Не использует разложение по азимутальным гармоникам. Позволяет легко учесть практически любые детали взаимодействия излучения с атмосферой и поверхностью (анизотропию отражения, поляризацию, сферичность атмосферы, горизонтальную неоднородность и т.п., решить задачи, не решаемые иными методами). Физически нагляден, прост в реализации. Может применяться одновременно со спектральным интегрированием.	Результаты вычислений содержат случайную погрешность. В классическом варианте не применим для теплового излучения и облачной атмосферы.

## Литература

1. Тимофеев Ю.М., Васильев А.В. Основы теоретической атмосферной оптики. Учебно-методическое пособие. СПб, 2007, 154с.
2. Тимофеев Ю.М., Васильев А.В. Теоретические основы атмосферной оптики. СПб., Наука, 2003, 474с.
3. Васильев А.В., Мельникова И.Н. Коротковолновое солнечное излучение в атмосфере Земли. Расчеты. Измерения. Интерпретация. СПб., НИИХ СПбГУ, 2002, 388с.
4. Васильев А.В., Кузнецов А.Д., Мельникова И.Н. Дистанционное зондирование окружающей среды из космоса: практикум. Изд-во Балт. гос. техн. ун-та, 2008, СПб, 133с.
5. Цимринг Ш.Е. Специальные функции и определенные интегралы. Алгоритмы. Программы для микрокалькуляторов. Справочник. М., Радио и связь, 1988, 272с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по высшей математике. М., Наука, пер. с англ., 1973, 822с.
7. Young A.T. Revised depolarization corrections for atmospheric extinction. Applied Optics, 1980, v.19, N 20, p.3427-3438.
8. Васильев А.В. Разложение таблично заданной индикатрисы рассеяния в ряд по полиномам Лежандра. Вестник СПбГУ, сер.4: Физика, химия. 1997, вып.3, (N 18), с.38-43.
9. Васильев А.В. Универсальный алгоритм расчета оптических характеристик однородных сферических частиц. I. Одиночные частицы. Вестник СПбГУ, сер.4: Физика, химия. 1996, вып.4, (N 25), с.3-11.
10. Васильев А.В. Универсальный алгоритм расчета оптических характеристик однородных сферических частиц. II. Ансамбли частиц. Вестник СПбГУ, сер.4: Физика, химия. 1997, вып.1, (N 4), с.14-24.
11. Соболев В.В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. М., Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1956, 391с.
12. Борен К., Хафман Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М., Мир, пер. с англ., 1986, 660с.
13. Нагирнер Д.И. Лекции по теории переноса излучения. СПб., Изд-во СПбГУ, 2001, 284с.
14. Тимофеев Ю.М. Глобальная система мониторинга параметров атмосферы и поверхности. Изд-во СПбГУ, 2010, 129с.
15. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Оптика. М., Наука, 1980, 751с.
16. Сушкевич Т.А. Математические модели переноса излучения. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2005, 661с.
17. Комаров В.С., Мицель А.А., Михайлов С.А. и др. Программное и информационное обеспечение задач оптики атмосферы // Оптика атмосферы. 1988. Т. 1. № 5. С. 82—89.
18. Косцов В.С. Спутниковое исследование средней атмосферы: температура, газовый состав, неравновесная населенность колебательных состояний молекул // Дисс. на соиск. уч. ст. докт. физ.-мат. наук. СПбГУ. 2008.
19. Мицель А.А., К.М. Фирсов, Б.А. Фомин. Перенос оптического излучения в молекулярной атмосфере. Томск: Изд-во STT(Scientific & Technical Translations). 2001. 443 с.
20. Тимофеев Ю.М., А.В. Васильев. Теоретические основы атмосферной оптики. СПб: "Наука", 2003. 475 с.

21. Успенский А.Б., Троценко А.Н., Рублев А.Н. Проблемы и перспективы анализа и использования данных спутниковых ИК-зондировщиков высокого спектрального разрешения // Иссл. Земли из космоса. 2005. №5. С. 18—33.
22. Berk A., L. W. Bernstein, and D. C. Robertson. MODTRAN: A moderate resolution model for LOWTRAN 7 // Rep. AFGL-TR-83-0187. 1983. 261 pp.
23. Chen, Y., Y. Han, and F. Weng. Comparison of two transmittance algorithms in the community radiative transfer model: Application to AVHRR // J. Geophys. Res. 2012. Vol. 117. D06206, doi:10.1029/2011JD016656.
24. [Chetwynd James H. Jr.](#), [Jinxue Wang](#), [Gail P. Anderson](#). Fast Atmospheric Signature CODE (FASCODE): an update and applications in atmospheric remote sensing // Proc. SPIE. 1994. Vol. 2266. P. 613—623.
25. Clarmann, T.v., A. Dudhia, D.P. Edwards, et al. Intercomparison of radiative transfer codes under non-local thermodynamic equilibrium conditions // J. Geophys. Res. 2002. Vol. 107. N D22. 4631. Doi: 10.1029/2001JD001551.
26. Clough, S.A., and M.J. Iacono. Line-by-line calculations of atmospheric fluxes and cooling rates II: Application to carbon dioxide, ozone, methane, nitrous oxide, and the halocarbons // J. Geophys. Res. 1995. Vol. 100. P. 16,519—16,535.
27. Dudhia A. The Reference Forward Model (RFM) // J.Q.S.R.T. 2016 (in press).
28. Edwards, D.P. GENLN2: A general line-by-line atmospheric transmittance and radiance model, Version 3.0 description and users guide // NCAR/TN-367-STR. 1992. National Center for Atmospheric Research, Boulder, Co.
29. Grossmann, K.U., D. Offerman, O. Gusev, et al. The CRISTA 2 mission // J. Geophys. Res., 2002. Vol. 107. N D23. 8173. Doi:10.1029/2001JD000667.
30. Halthore Rangasayi N., David Crisp, Stephen E. Schwartz, et al. Intercomparison of shortwave radiative transfer codes and measurements // J. Geophys. Res. 2005. Vol. 110. D11206, doi:10.1029/2004JD005293.
31. Iacono M.J., J.S. Delamere, E.J. Mlawer, et al. Radiative forcing by long-lived greenhouse gases: Calculations with the AER radiative transfer models // J. Geophys. Res. 2008. Vol. 113, D13103, doi:10.1029/2008JD009944.
32. Key J. and A.J. Schweiger. Tools for atmospheric radiative transfer: Streamer and FluxNet // Comp. & Geos. 1998. Vol. 24. N 5. P. 443—451.
33. Kneizys F.X., Shettle E.P., Gallery W.O., et al. Atmospheric Transmittance/Radiance: Computer Code LOWTRAN 6. Supplement: Program Listings. Air Force Geophysics Lab Hanscom Afb Ma 01 Aug 1983, 197 p.
34. Kotchenova S.Y., E.F. Vermote, R. Matarrese, & F.J. Klemm, Jr. Validation of a vector version of the 6S radiative transfer code for atmospheric correction of satellite data. Part I: Path Radiance // Appl. Optics. 2006. Vol. 45. N 26. P. 6726—6774.
35. Kratz, D. P., M.G. Mlynczak, Ch.J. Mertens, et al. An inter-comparison of far-infrared line-by-line radiative transfer models // J.Q.S.R.T. 2005. Vol. 90. N 3—4. P. 323—341.
36. Loughman R.P., E. Griffioen, L. Oikarinen, et al. Comparison of radiative transfer models for limb-viewing scattered sunlight measurements // J. Geophys. Res. 2004. Vol. 109. D06303, doi:10.1029/2003JD003854.
37. Mayer B. and A. Kylling. Technical note: The libRadtran software package for radiative transfer calculations - description and examples of use // Atmos. Chem. Phys. 2005. Vol. 5. P. 1855—1877.

- 38 Mitsel A.A., Ponomarev Yu.N., Firsov K.M., et al. The computer codes LARA and AIRA for transmittance and radiance: current status // J.Q.S.R.T. 1995. Vol. 54. N 3. P. 559—572.
39. Mlawer E.J., S.J. Taubman, P.D. Brown, et al. RRTM, a validated correlated-k model for the longwave // J. Geophys. Res. 1997. Vol. 102. P. 16,663—16,682.
40. Neuhauser K.S. and Kanipe F.L. RADTRAN 5, Technical Manual. Sand Report. SAND2003-2354. Albuquerque, New Mexico: Sandia National Laboratories. 2003. 133 p.
41. Oreopoulos L., Mlawer E., Delamere J., et al. The Continual Intercomparison of Radiation Codes: Results from Phase I // J. Geophys. Res. 2012. Vol. 117. D06118, doi:10.1029/2011JD016821.
42. Ricchiazzi Paul, Shiren Yang, and Catherine Gautier. SBDART: A Research and Teaching Software Tool for Plane-Parallel Radiative Transfer in the Earth's Atmosphere // Bull. Am. Meteorol. Soc. 1998. Vol. 79. N 10. P. 2101—2114.
43. Rothman L.S., I. E. Gordon, Y. Babikov, et al. [The HITRAN2012 molecular spectroscopic database](#) // J.Q.S.R.T. 2013. Vol. 130. P. 4—50.
44. Rozanov V.V., D. Diebel, R. J. D. Spurr, J. P. Burrows. GOMETRAN: A radiative transfer model for the satellite project GOME, the plane-parallel version // J.G.R. 1997. Vol. 102. ND14. P. 16683—16695.
45. Rozanov, V., Rozanov, A., Kokhanovsky, A., Burrows, J.P. Radiative transfer through terrestrial atmosphere and ocean: Software package SCIATRAN. J.Q.S.R.T. 2014. Vol. 133. P. 13—71.
46. Saunders R.W., M. Matricardi, P. Brunel. An improved fast Radiative Transfer Model for Assimilation of Satellite Radiance Observations // Q.J.R.Met. Soc. 1999. Vol. 125. P. 1407—1425.
47. Saunders, R. W., Matricardi, M., Brunel, P. An Improved Fast Radiative Transfer Model for Assimilation of Satellite Radiance Observations. Quart. J. Royal Meteorol. Soc. 1999. Vol. 125. P. 1407—1425.
48. Schreiera F., S. Gimeno Garciaa, M. Milzb, et al. Intercomparison of Three Microwave/Infrared High Resolution Line-by-line Radiative Transfer Codes / AIP Conf. Proc. 2013. Vol. 1531. 119. Doi: 10.1063/1.4804722.
49. Scott N.A. and A. Chedin. A fast line-by-line method for atmospheric absorption computations: The Automated Atmospheric Absorption Atlas // J. Appl. Met. 1981. Vol. 20. P. 802—812.
50. Seidel F.C., A.A. Kokhanovsky, and M.E. Schaepman. Fast and simple model for atmospheric radiative transfer // Atmos. Meas. Tech. 2010. Vol. 3. N 4. P. 1129—1141.
51. Stamnes K., S.C. Tsay, W. Wiscombe and K. Jayaweera. Numerically stable algorithm for discrete-ordinate-method radiative transfer in multiple scattering and emitting layered media // Appl. Opt. 1988. Vol. 27. N 12. P. 2502—2509.
52. Stiller, G. P., von Clarmann, T., Funke, B., et al. Sensitivity of trace gas abundances retrievals from infrared limb emission spectra to simplifying approximations in radiative transfer modeling. J.Q.S.R.T. 2002. Vol. 72. N 3. P. 249—280.
53. Strow L.L., S.E.Hannon, S.DeSouza-Mackado et al. An overview of the AIRS radiative transfer model // IEEE Trans. Geosci. Rem. Sens. 2003. Vol. 41. N 2. P. 303—313.
54. Sundberg, R.L., Duff, J.W., Gruninger, J.H., et al. SHARC, a Model for Calculating Atmospheric infrared Radiation Under Non-Equilibrium Conditions in

The Upper Mesosphere and the Lower Thermosphere: A Review of Experiment and Theory // Geophys. Monograph Series. 1995. Vol. 87. P. 287—295.

55. *Trotsenko A.N., A.V. Kopylov, A.N. Rublev, et al.* Efficient forward model to simulate IASI/METOP measurements and its validation against high-resolution field observations. Proc. IRS 2000. W. L. Smith and Yu. M. Timofeyev (Eds.). A. Deepak Publishing, Hampton, Virginia, 2001. P. 401—403.